ОБЪ ИНВАРІАНТАХЪ

ПРОСТѢЙШИХЪ СИСТЕМЪ

СОВОКУПНЫХЪ БИНАРНЫХЪ ФОРМЪ.

А. Бесселя.

САНКТПЕТЕРБУРГЪ, 1868.

ТИПОГРАФІЯ ИМПЕРАТОРСКОЙ АКАДЕМІИ НАУКЪ.

(В. О., 9 лин., № 12.)

Напечатано по распоряженію Императорской Академіи Наукъ. Санктпетербургъ, ноябрь 1868 г.

Непремѣнный Секретарь, Академикъ *К. Веселовскій*.

ПРЕДИСЛОВІЕ.

Первый примѣръ одновременнаго разсматриванія двухъ и трехъ бинарныхъ формъ можно найти въ пятомъ мемуарѣ Келе «о формахъ» [1]). Онъ даетъ инваріанты и коваріанту двухъ квадратичныхъ бинарныхъ формъ и объясняетъ ихъ геометрическое значеніе. Отсюда теорія инваріантъ двухъ квадратичныхъ бинарныхъ формъ перешла, въ болѣе или менѣе сокращенномъ видѣ, въ различныя руководства, напр. Аналитическую геометрію плоскости Гессе, Коническія сѣченія Сальмона и др. Въ этомъ послѣднемъ сочиненіи, а еще полнѣе въ нѣмецкомъ переводѣ Фидлера, можно также найти вычисленіе инваріантъ двухъ квадратичныхъ формъ съ 3-мя перемѣнными, а въ Геометріи трехъ измѣреній Сальмона выводятся даже инваріанты 2-хъ квадратич ныхъ формъ съ 4-мя перемѣнными. Келе даетъ также инваріанту 3-й степени трехъ бинарныхъ формъ, но не упоминаетъ о томъ, что квадратъ этой инваріанты есть цѣлая функція шести инваріантъ второй степени разсматриваемой системы формъ. Нельзя не удивиться, что такая простая теорема до сихъ поръ еще не была никѣмъ доказана. Это объясняется до нѣкоторой степени развѣ только тѣмъ, что не только теорія инваріантъ *совокупныхъ* формъ, но и теорія инваріантъ вообще, до появленія мемуара Аронгольда «Über eine fundamentale Begründung der Invariantentheorie» [2]), не имѣла прочнаго основанія. Въ этомъ

---

[1]) Cayley, Fifth memoir upon quantics, Philos. Transactions, T. 148.

[2]) Журналъ Креля, томъ 62.

мемуарѣ Аронгольдъ, котораго вообще нужно считать основателемъ раціональной разработки теоріи инваріантъ, указываетъ и на необходимость разсматривать одновременно различныя формы одинаковыхъ и разныхъ степеней, и выводитъ дифференціальныя уравненія, которымъ должны удовлетворять ихъ инваріанты и коваріанты. Сальмонъ, во второмъ изданіи «Lessons introductory to the modern higher Algebra» (1866), посвящаетъ теоріи инваріантъ совокупныхъ формъ цѣлую главу, въ которой онъ однако даетъ большею частью только теоремы, относящіяся къ системѣ двухъ бинарныхъ формъ одинаковой степени. Въ слѣдующей главѣ, кромѣ отдѣльныхъ формъ отъ 2-й до 6-й степени, онъ разсматриваетъ слѣдующія системы совокупныхъ бинарныхъ формъ:

1) систему 2-хъ квадратичныхъ формъ,

2) » , состоящую изъ 1-й квадратичной и 1-й кубической формы,

3) систему 2-хъ кубическихъ формъ,

4) » 2-хъ формъ 4-й степени.

Способъ изслѣдованія Сальмона не отличается особеннымъ изяществомъ. Онъ пользуется символическими изображеніями Келея только для *отысканія* инваріантъ и коваріантъ, *соотношенія* же между ними обнаруживаетъ помощью приведенія формъ къ простѣйшему виду, ненарушающаго общности данныхъ формъ. При удачномъ выборѣ частнаго вида формъ, выраженія инваріантъ и коваріантъ на столько упрощаются, что нѣкоторыя соотношенія между ними усматриваются непосредственно.

Нѣкоторыми изъ вышеупомянутыхъ системъ занимался также Клебшъ. Въ 68-мъ томѣ журнала Креля (Борхардта) напечатанъ его мемуаръ о 2-хъ совокупныхъ бинарныхъ формахъ 2-й и 3-й степеней. Его способъ изслѣдованія несравненно изящнѣе. Онъ не прибѣгаетъ къ приведенію формъ къ частному виду, и сохраняетъ за то полную правильность и симметричность выкладокъ. Главнымъ орудіемъ ему служитъ тождественное преобразованіе символическихъ выраженій инваріантъ и коваріантъ. Когда я занимался системою 2-хъ бинарныхъ формъ 2-й и 3-й степеней, мемуаръ Клебша объ этихъ формахъ мнѣ еще не былъ извѣстенъ. Мои выкладки на столько отличаются отъ Клебшевыхъ, что чтеніе моихъ изысканій будетъ, можетъ быть, не лишено интереса и послѣ мемуара Клебша. Впрочемъ Клебшъ выводитъ только на основаніи типическихъ изображеній главнѣйшія инваріанты и коваріанты и ихъ взаимныя соотношенія; но не доказываетъ, что изъ найденныхъ имъ инваріантъ всѣ прочія могутъ быть составлены въ видѣ цѣлыхъ раціональныхъ функцій. Вообще вопросъ о самомъ общемъ выраженіи какой ни есть инваріанты системы совокупныхъ формъ до сихъ поръ никѣмъ еще не былъ затронутъ. Въ этомъ разсужденіи я занимаюсь слѣдующими 4-мя системами бинарныхъ формъ:

1) 2-мя совокупными квадратичными формами,
2) 3-мя » » »
3) системою 2-хъ формъ 2-й и 3-й степеней,
4) » » » 2-й и 4-й » ,

которыя рѣзко отличаются отъ всѣхъ прочихъ системъ бинарныхъ формъ по простотѣ самаго общаго выраженія инваріанты каждой изъ этихъ системъ. Изъ общей теоріи инваріантъ извѣстно, что всякая инваріанта данной системы формъ есть *алгебрическая* функція опредѣленной системы основныхъ инваріантъ. Понимая подъ инваріантою всегда *цѣлую* функцію коэффиціентовъ данныхъ формъ, я доказываю, что всякая инваріанта 2-хъ квадратичныхъ формъ есть цѣлая функція 3-хъ основныхъ инваріантъ, а всякая инваріанта системы, состоящей изъ 3-хъ квадратичныхъ формъ, или изъ одной квадратичной и одной формы 3-й или 4-й степени — либо цѣлая раціональная функція основныхъ инваріантъ системы, либо произведеніе таковой функціи на *квадратный корень* изъ нѣкоторой цѣлой функціи основныхъ же инваріантъ, который самъ по себѣ есть инваріанта разсматриваемой системы. Замѣчательно, что выраженія всѣхъ инваріантъ каждой изъ четырехъ упомянутыхъ системъ формъ въ функціи основныхъ инваріантъ системы, подобно формамъ первыхъ 6-ти степеней, могутъ заключать въ себѣ только *одну* ирраціональность, а именно *одинъ квадратный корень* изъ цѣлой функціи. Это, кажется, исключительное свойство разсматриваемыхъ мною системъ бинарныхъ формъ, вслѣдствіе котораго я и считаю себя въ правѣ называть ихъ простѣйшими.

Образцомъ для изслѣдованія общаго вида инваріанты данной системы формъ мнѣ послужило изысканіе Эрмита объ инваріантахъ бинарной формы 5-й степени. Способы же изслѣдованія соотношеній между инваріантами и коваріантами помощью тождественныхъ преобразованій символическихъ выраженій и опредѣлителей почерпнуты изъ мемуара Клебша и Гордана «Sulla rappresentazione tipica delle forme binarie» [1]). Подобныя изслѣдованія, въ теоріи каждой системы формъ, должны предшествовать изслѣдованію общаго выраженія инваріанты. Хотя первыя три системы отчасти уже были изслѣдованы съ этой точки зрѣнія, однако мнѣ понадобилось изложить соотношенія между ихъ инваріантами и коваріантами съ большей полнотою, для того, чтобы теорія инваріантъ предшествующихъ системъ могла служить основаніемъ для изслѣдованія дальнѣйшихъ, преимущественно системы 2-хъ формъ 2-й и 4-й степеней, о которой до сихъ поръ ничего не было писано.

Прежде чѣмъ приступить къ изложенію моихъ изслѣдованій объ инваріантахъ и коваріантахъ упомянутыхъ 4-хъ системъ формъ, я привожу нѣкоторыя общеизвѣстныя опредѣленія и теоремы. Мнѣ это показалось умѣстнымъ, такъ какъ по излагаемому мною предмету еще ничего не писано по-русски, и слѣдовательно необходимо сначала условиться въ названіяхъ. Нѣкоторыя теоремы распространены мною на *системы* формъ, напримѣръ теоремы о *вѣсѣ* инваріантъ. Теорема, касающаяся числа инваріантъ данной формы или системы формъ, доказана весьма просто и совершенно строго. Доказательство Аронгольда, что число абсолютныхъ инваріантовъ системы формъ съ n перемѣнными равно

---

[1]) Annali di Matematica pura ed applicata, Serie II, T. I, Milano, 1867.

числу коэффиціентовъ данныхъ формъ минусъ n^2, не строго потому, что онъ допускаетъ безъ доказательства возможность рѣшенія которыхъ-нибудь n^2 изъ уравненій, связывающихъ коэффиціенты данныхъ и преобразованныхъ формъ съ коеффиціентами подстановки, относительно сихъ послѣднихъ [1]), а доказательство той же теоремы, предлагаемое Клебшемъ [2]), имѣетъ тотъ недостатокъ, что онъ допускаетъ независимость между собою линейныхъ совокупныхъ уравненій съ частными производными, которыми опредѣляются абсолютныя инваріанты. Кристофель, обративъ вниманіе на нестрогости этихъ двухъ доказательствъ [3]), предлагаетъ оставлять въ началѣ теоріи инваріантъ вопросъ о числѣ инваріантъ нерѣшеннымъ, и указываетъ на теоремы, которыми можно пользоваться впослѣдствіи для его рѣшенія. Читатель увидитъ, что нѣтъ надобности отказываться въ началѣ теоріи отъ опредѣленія числа инваріантъ, потому-что доказательство Клебша легко пополняется.

---

1) Журналъ Креля, томъ 62.
2) » » » 65.
3) » » » 68.

I. ОБЪ ИНВАРІАНТАХЪ И КОВАРІАНТАХЪ СОВОКУПНЫХЪ БИНАРНЫХЪ ФОРМЪ И ИХЪ СИМВОЛИЧЕСКИХЪ ВЫРАЖЕНІЯХЪ.

---

§ 1. Всякая цѣлая однородная функція двухъ или нѣсколькихъ перемѣнныхъ называется *формою.* Поэтому формы различаются числомъ измѣреній и числомъ перемѣнныхъ. Въ этомъ разсужденіи я ограничиваюсь только формами съ *двумя* перемѣнными, которыя для краткости называю *бинарными;* поэтому каждый разъ, какъ не обозначено число перемѣнныхъ, нужно понимать, что разсматриваемая форма бинарная.

Отъ подстановки на мѣсто перемѣнныхъ, положимъ, x и y, линейныхъ выраженій $\alpha X + \beta Y$, $\gamma X + \delta Y$, гдѣ X и Y новыя перемѣнныя, не измѣняется степень формы, а получается въ перемѣнныхъ X и Y форма одного вида съ данною. Чтобы вывести законъ, по которому коэффиціенты преобразованной формы составляются изъ коэффиціентовъ данной формы, стоитъ только сдѣлать въ данной формѣ $f(x, y)$ указанную подстановку и разложить функцію

$$f(\alpha X + \beta Y, \gamma X + \delta Y)$$

по теоремѣ Тайлора. Обративъ вниманіе на то обстоятельство, что $f(x, y)$ однородная функція отъ x и y, и означивъ степень ея черезъ n, для коэффиціентовъ при

$$X^n, \quad X^{n-1}Y, \quad X^{n-2}Y^2, \quad \ldots \; Y^n$$

находимъ слѣдующія выраженія:

$$f(\alpha,\gamma),\ \frac{df(\alpha,\gamma)}{d\alpha}\beta+\frac{df(\alpha,\gamma)}{d\gamma}\delta,\ \frac{1}{2}\left\{\frac{d^2f(\alpha,\gamma)}{d\alpha^2}\beta^2+2\frac{d^2f(\alpha,\gamma)}{d\alpha\,d\gamma}\beta\delta+\frac{d^2f(\alpha,\gamma)}{d\gamma^2}\delta^2\right\}$$

$$\ldots f(\beta,\delta).$$

Всѣ эти выраженія n-ой степени относительно коэффиціентовъ подстановки и первой степени относительно коэффиціентовъ данной формы. Постоянныя α, β, γ, δ подчинены только условію, чтобы опредѣлитель $\alpha\delta-\beta\gamma$ не $=0$, а впрочемъ совершенно произвольны. Этотъ опредѣлитель называется *модулемъ* подстановки.

Помощью выраженій коэффиціентовъ преобразованной формы, мы можемъ судить о томъ, возможно ли преобразованіе одной изъ двухъ данныхъ формъ

$$\left.\begin{aligned} f(x,y)&=a_0x^n+na_1x^{n-1}y+\frac{n(n-1)}{1.2}a_2x^{n-2}y^2+\ldots\\ F(X,Y)&=A_0X^n+nA_1X^{n-1}Y+\ldots\end{aligned}\right\}\ldots \quad (1)$$

въ другую. Если

$$F(X,Y)=f(\alpha X+\beta Y,\gamma X+\delta Y),$$

то

$$A_0=f(\alpha,\gamma),\ A_1=\frac{1}{n}\left\{\frac{df(\alpha,\gamma)}{d\alpha}\beta+\frac{df(\alpha,\gamma)}{d\gamma}\delta\right\},\ \ldots \quad (2).$$

Исключивъ изъ этихъ $n+1$ уравненій α, β, γ, δ, мы получимъ условія, которымъ должны удовлетворять коэффиціенты формъ (1), чтобы $f(x,y)$ преобразовывалось въ $F(X,Y)$. Раздѣливъ всѣ ур. (2) на одно изъ нихъ, напр. первое, мы получимъ n ур., заключающихъ только 3 отношенія коэффиціентовъ подстановки. Первыя части этихъ n ур. будутъ $\frac{A_1}{A_0}, \frac{A_2}{A_0}, \ldots \frac{A_n}{A_0}$, а вторыя могутъ быть выражены въ функціи отношеній $\frac{a_1}{a_0}, \frac{a_2}{a_0}, \ldots \frac{a_n}{a_0}$. Каждое уравненіе, получаемое по исключеніи изъ нихъ отношеній $\alpha:\beta:\gamma:\delta$, будетъ вида

$$R=0,$$

гдѣ R цѣлая функція отношеній $\frac{a_i}{a_0}$ и $\frac{A_i}{A_0}$, и слѣдовательно по уничтоженіи знаменателей приведется къ функціи однородной какъ относительно $a_0, a_1, \ldots a_n$, такъ и относительно $A_0, A_1, \ldots A_n$. Поэтому всѣ условія преобразуемости одной изъ формъ (1) въ другую могутъ быть представлены въ слѣдующемъ видѣ:

$$pQ + p_1Q_1 + \ldots = 0, \ldots \quad (3),$$

гдѣ $p, p_1, \ldots$ цѣлыя однородныя функціи одинаковой степени отъ $a_0, a_1, \ldots a_n$, а $Q, Q_1, \ldots$ цѣлыя однородныя функціи одинаковой степени отъ $A_0, A_1, \ldots A_n$. Рѣшивъ ур. (3) относительно p, получимъ

$$p = \Pi,$$

гдѣ $\Pi = -\frac{p_1Q_1 + \ldots}{Q}$ есть раціональная однородная функція 0-ой степени отъ $A_0, A_1, \ldots A_n$, обращающаяся отъ подстановки выраженій (2) въ величину p, независящую отъ $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ и не равную нулю. Очевидно не только всѣ условія преобразуемости могутъ быть приведены къ виду

$$\Pi(A_i, a_i) = p(a_i), \ldots \quad (3'),$$

но изъ нихъ можно даже получить множество функцій Π отъ A_i, независящихъ отъ $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Однако число подобныхъ функцій, независимыхъ между собою относительно перемѣнныхъ A_i, не можетъ быть болѣе числа этихъ условій, потому что обратно каждая функція Π даетъ одинъ результатъ исключенія вида (3). Въ самомъ дѣлѣ, если $\Pi = \varphi(A_i, a_i)$ независитъ отъ коэффиціентовъ подстановки, то можно замѣнить ихъ коэффиціентами какой угодно частной подстановки, модуль которой не $= 0$, напр.

$$x = X, \ y = Y.$$

Отъ этого A_i обращается въ a_i, и слѣдовательно, если означимъ $\varphi(a_i, a_i)$ черезъ π, то будемъ имѣть

$$\Pi - \pi = 0$$

при всякихъ α, β, γ, δ, другими словами, это уравненіе будетъ одно изъ условій преобразуемости.

И такъ, исключеніе α, β, γ, δ изъ уравненія (2) приводится къ отъисканію всѣхъ функцій отъ A_i и a_i, независящихъ отъ коэффиціентовъ подстановки и не обращающихся въ нуль отъ подстановки выраженій (2) на мѣсто $A_0, A_1, \ldots A_n$.

Условіе, необходимое и достаточное для того, чтобы П независѣло отъ α, β, γ, δ, выражается четырьмя уравненіями:

$$\frac{d\Pi}{d\alpha}=0,\ \frac{d\Pi}{d\beta}=0,\ \frac{d\Pi}{d\gamma}=0,\ \frac{d\Pi}{d\delta}=0.$$

Эти 4 уравненія могутъ быть замѣнены четырьмя другими, незаключающими явнымъ образомъ α, β, γ, δ. Замѣтимъ, вопервыхъ, что уравненіе

$$F(X,\ Y)=f(x,\ y)$$

становится тождественнымъ, если на мѣсто x и y поставить $\alpha X+\beta Y$, $\gamma X+\delta Y$, а на мѣсто A_i выраженія (2). Поэтому также будетъ тождественно

$$\frac{df}{d\alpha}=a_0\frac{d(x^n)}{d\alpha}+na_1\frac{d(x^{n-1}y)}{d\alpha}+\ldots=\frac{dF}{d\alpha}=\frac{dA_0}{d\alpha}X^n+n\frac{dA_1}{d\alpha}X^{n-1}Y+\ldots$$

. . . .

Но

$$\frac{dF}{d\alpha}=\frac{df}{dx}X,\ \frac{dF}{d\beta}=\frac{df}{dx}Y,\ \frac{dF}{d\gamma}=\frac{df}{dy}X,\ \frac{dF}{d\delta}=\frac{dF}{dy}Y;$$

поэтому

$$\left.\begin{aligned}X\frac{df}{dx}&=\frac{dA_0}{d\alpha}X^n+n\frac{dA_1}{d\alpha}X^{n-1}Y+\ldots\\ X\frac{df}{dy}&=\frac{dA_0}{d\gamma}X^n+n\frac{dA_1}{d\gamma}X^{n-1}Y+\ldots\end{aligned}\right\}\ldots\quad(4).$$

Помноживъ первое уравненіе на α, а второе на γ, и взявъ сумму, получимъ

$$X\left\{\frac{df}{dx}\alpha+\frac{df}{dy}\gamma\right\}=X\frac{dF}{dX}$$

$$=\left\{\frac{dA_0}{d\alpha}\alpha+\frac{dA_0}{d\gamma}\gamma\right\}X^n+n\left\{\frac{dA_1}{d\alpha}\alpha+\frac{dA_1}{d\gamma}\gamma\right\}X^{n-1}Y+\ldots\quad(5),$$

а помноживъ ур. (4) на β и δ, получимъ въ суммѣ

$$X\frac{dF}{dY}=\left\{\frac{dA_0}{d\alpha}\beta+\frac{dA_0}{d\gamma}\delta\right\}X^n+n\left\{\frac{dA_1}{d\alpha}\beta+\frac{dA_1}{d\gamma}\delta\right\}X^{n-1}Y+\ldots \quad (6).$$

Подобнымъ образомъ изъ уравненій

$$Y\frac{df}{dx}=\frac{dA_0}{d\beta}X^n+n\frac{dA_1}{d\beta}X^{n-1}Y+\ldots$$

$$Y\frac{df}{dy}=\frac{dA_0}{d\delta}X^n+n\frac{dA_1}{d\delta}X^{n-1}Y+\ldots$$

выводимъ

$$\left.\begin{aligned}Y\frac{dF}{dX}&=\left\{\frac{dA_0}{d\beta}\alpha+\frac{dA_0}{d\delta}\gamma\right\}X^n+n\left\{\frac{dA_1}{d\beta}\alpha+\frac{dA_1}{d\delta}\gamma\right\}X^{n-1}Y+\ldots\\ Y\frac{dF}{dY}&=\left\{\frac{dA_0}{d\beta}\beta+\frac{dA_0}{d\delta}\delta\right\}X^n+n\left\{\frac{dA_1}{d\beta}\beta+\frac{dA_1}{d\delta}\delta\right\}X^{n-1}Y+\ldots\end{aligned}\right\}\ldots \quad (7).$$

Такъ какъ ур. (5), (6), (7) тождественны, то можно написать въ нихъ на мѣсто

$$X^n, \quad X^{n-1}Y, \quad X^{n-2}Y, \ldots \quad XY^{n-1}, \quad Y^n$$

частныя производныя П, дѣленныя на биноміальные коэффиціенты:

$$\frac{d\Pi}{dA_0}, \quad \frac{1}{n}\frac{d\Pi}{dA_1}, \quad \frac{1.2}{n(n-1)}\frac{d\Pi}{dA_2}, \ldots \quad \frac{1}{n}\frac{d\Pi}{dA_{n-1}}, \quad \frac{d\Pi}{dA_n}\ldots \quad (8).$$

Отъ этого вторыя части ур. (5—7) обратятся въ слѣдующія выраженія:

$$\alpha\sum_i\frac{d\Pi}{dA_i}\frac{dA_i}{d\alpha}+\gamma\sum_i\frac{d\Pi}{dA_i}\frac{dA_i}{d\gamma}=\alpha\frac{d\Pi}{d\alpha}+\gamma\frac{d\Pi}{d\gamma},$$

$$\beta\sum\frac{d\Pi}{dA_i}\frac{dA_i}{d\alpha}+\delta\sum\frac{d\Pi}{dA_i}\frac{dA_i}{d\gamma}=\beta\frac{d\Pi}{d\alpha}+\delta\frac{d\Pi}{d\gamma},$$

$$\alpha\sum\frac{d\Pi}{dA_i}\frac{dA_i}{d\beta}+\gamma\sum\frac{d\Pi}{dA_i}\frac{dA_i}{d\delta}=\alpha\frac{d\Pi}{d\beta}+\gamma\frac{d\Pi}{d\delta},$$

$$\beta\sum\frac{d\Pi}{dA_i}\frac{dA_i}{d\beta}+\delta\sum\frac{d\Pi}{dA_i}\frac{dA_i}{d\delta}=\beta\frac{d\Pi}{d\beta}+\delta\frac{d\Pi}{d\delta};$$

а если означимъ выраженія (8) чрезъ $\Pi_0, \Pi_1, \Pi_2 \ldots \Pi_{n-1}, \Pi_n$, то

$$X\frac{dF}{dX} \text{ перейдетъ въ } n\sum_{0}^{n-1}(n-1)_i A_i \quad \Pi_i \quad = D_{00}(\Pi),$$

$$X\frac{dF}{dY} \quad » \quad » \; n\sum(n-1)_i A_{i+1}\Pi_i \quad = D_{10}(\Pi),$$

$$Y\frac{dF}{dX} \quad » \quad » \; n\sum(n-1)_i A_i \quad \Pi_{i+1} = D_{01}(\Pi),$$

$$Y\frac{dF}{dY} \quad » \quad » \; n\sum(n-1)_i A_{i+1}\Pi_{i+1} = D_{11}(\Pi).$$

Здѣсь $(n-1)_i$ обозначаетъ бин. к. $\frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-i)}{1\;.\;2\ldots\ldots\ldots i}$. Итакъ будетъ тождественно

$$\left.\begin{array}{ll} D_{00}(\Pi) = \alpha\frac{d\Pi}{d\alpha} + \gamma\frac{d\Pi}{d\gamma} & D_{01}(\Pi) = \alpha\frac{d\Pi}{d\beta} + \gamma\frac{d\Pi}{d\delta} \\ D_{10}(\Pi) = \beta\frac{d\Pi}{d\alpha} + \delta\frac{d\Pi}{d\gamma} & D_{11}(\Pi) = \beta\frac{d\Pi}{d\beta} + \delta\frac{d\Pi}{d\delta} \end{array}\right\} \quad (9).$$

Если теперь П независитъ отъ коэффиціентовъ подстановки, т. е. производныя П по α, β, γ, δ равны нулю, то эти уравненія даютъ:

$$D_{00}(\Pi) = 0, \; D_{10}(\Pi) = 0, \; D_{01}(\Pi) = 0, \; D_{11}(\Pi) = 0 \ldots \quad (10).$$

Такъ какъ $\alpha\delta - \beta\gamma$ не $= 0$, то изъ ур. (9) можно заключить, что и обратно ур. (10) всегда влекутъ за собою ур.

$$\frac{d\Pi}{d\alpha} = 0, \; \frac{d\Pi}{d\beta} = 0, \; \frac{d\Pi}{d\gamma} = 0, \; \frac{d\Pi}{d\delta} = 0 \ldots \quad (11).$$

Поэтому 2 системы уравненій (10) и (11) вполнѣ замѣняютъ одна другую.

Помощью ур. (10) можно доказать, что всѣ условія преобразуемости, т. е. всѣ результаты исключенія коэффиціентовъ подстановки изъ ур. (2) могутъ быть представлены подъ видомъ

$$\varphi(A_i) = \varphi(a_i).$$

Предположимъ, что между величинами p, p_1, ..., входящими въ ур. (3), нѣтъ линейнаго соотношенія, чего всегда можно достигнуть, замѣнивъ тѣ изъ величинъ p, которыя выражаются линейно помощью другихъ, ихъ выраженіями въ функціи прочихъ. Функція

$$\Pi = -\left(p_1 \frac{Q_1}{Q} + p_2 \frac{Q_2}{Q} + \dots\right),$$

получаемая изъ одного изъ результатовъ исключенія α, β, γ, δ изъ ур. (2), должна удовлетворять уравненію

$$D_{\rho\sigma}(\Pi) = 0 \quad (\rho = 0 \text{ или } 1,\ \sigma = 0 \text{ или } 1),$$

т. е. должно быть

$$p_1 D_{\rho\sigma}\left(\frac{Q_1}{Q}\right) + p_2 D_{\rho\sigma}\left(\frac{Q_2}{Q}\right) + \dots = 0 \dots \quad (\alpha).$$

Отсюда слѣдуетъ, что должно быть отдѣльно

$$D_{\rho\sigma}\left(\frac{Q_1}{Q}\right) = 0,\ D_{\rho\sigma}\left(\frac{Q_2}{Q}\right) = 0 \dots \quad (\beta),$$

потому-что иначе изъ ур. (α), которое должно быть удовлетворено при всякихъ значеніяхъ перемѣнныхъ A_i, давъ этимъ перемѣннымъ значенія, неудовлетворяющія ур. (β), мы получили бы между постоянными p_1, p_2, ... линейное соотношеніе. Если же раціональныя функціи $\frac{Q_1}{Q}$, $\frac{Q_2}{Q}$, ... удовлетворяютъ уравненію

$$D_{\rho\sigma}(\Pi) = 0,$$

то онѣ не зависятъ отъ коэффиціентовъ подстановки, и слѣдовательно уравненія

$$\frac{Q_1}{Q} = \frac{q_1}{q}, \quad \frac{Q_2}{Q} = \frac{q_2}{q}, \dots \quad (12),$$

гдѣ q_h означаетъ выраженіе, составленное изъ a_i подобнымъ образомъ, какъ Q_h изъ A_i, будутъ принадлежать къ числу условій преобразуемости. И такъ всѣ функціи отъ A_i и a_i, независящія отъ коэффиціентовъ подстановки, разбиваются на функціи однихъ A_i, имѣющія то же свойство; а такъ какъ всѣ условія преобразуемости могутъ быть представлены подъ видомъ (3′), то всѣ онѣ приведутся къ ур., подобнымъ (12). Поэтому число всѣхъ независимыхъ между собою функцій

$$\frac{Q_1}{Q},\ \frac{Q_2}{Q},\dots$$

должно быть равно числу условій преобразуемости.

Такъ какъ $\frac{q_1}{q}$, $\frac{q_2}{q}$, ... тѣ же функціи отъ a_i какъ $\frac{Q_1}{Q}$, $\frac{Q_2}{Q}$, ... отъ A_i, то $\frac{q_1}{q}$, $\frac{q_2}{q}$, ... будутъ удовлетворять дифференціальнымъ уравненіямъ

$$D_{\rho\sigma}(\Pi)=n\sum(n-1)_i\,a_{i+\rho}\,\pi_{i+\sigma}=0,\dots \qquad (13),$$

гдѣ вообще $\pi_k=\frac{1\ .\ 2\ \dots\dots\dots k}{n(n-1)\dots(n-k+1)}\frac{d\Pi}{da_k}$.

Раціональныя функціи коэффиціентовъ данной формы, составляющія 2-я части ур. преобразуемости (12) формы $f(x, y)$ въ $F(X, Y)$ называются *абсолютными инваріантами* формы $f(x, y)$, потому что онѣ вовсе не измѣняются отъ замѣненія коэффиціентовъ данной формы $f(x, y)$ коэффиціентами преобразованной формы $F(X, Y)$. Изъ предъидущаго вытекаютъ два способа полученія абсолютныхъ инваріантъ:

1) Исключеніе коэффиціентовъ подстановки изъ ур. (2).

2) Интегрированіе совокупныхъ дифференціальныхъ ур. (13).

Ни тотъ, ни другой способъ не удобенъ для полученія абсолютныхъ инваріантъ на самомъ дѣлѣ; въ теоретическомъ же отношеніи они весьма важны, потому что обнаруживаютъ a priori *существованіе* абсолютныхъ инваріантъ. Кромѣ того первый показываетъ, какую роль онѣ играютъ въ условіяхъ преобразуемости данной формы въ другую, одинаковой съ нею степени, а второй даетъ возможность опредѣлить *число* абсолютныхъ инваріантъ данной формы съ надлежащею строгостью. Для этой цѣли я докажу слѣдующія 2 предложенія:

1) Между 4-мя ур. (13) нѣтъ линейной зависимости.

2) Система диффер. ур. (13) *полная* или *замкнутая*.

Изъ этихъ двухъ предложеній можно будетъ заключить, что число интеграловъ ур. (13), т. е. число независимыхъ между собою абсолютныхъ инваріантъ равно числу перемѣнныхъ минусъ число уравненій, т. е. равно $n-3$. Я предполагаю теперь, что $n \geqq 4$, а случаи $n=3$, $n=2$ и $n=1$ разсмотрю отдѣльно.

Первое предложеніе доказывается весьма просто. Для того, чтобы между выраженіями

$$D_{00}(\pi),\ D_{01}(\pi),\ D_{10}(\pi),\ D_{11}(\pi)\ldots \qquad (14)$$

существовало линейное соотношеніе, всѣ опредѣлители 4-го порядка, составленные изъ коэффиціентовъ $\pi_0, \pi_1, \ldots \pi_n$ въ этихъ выраженіяхъ:

$$\begin{array}{cccccc}
a_0 & (n-1)a_1 & (n-1)_2a_2 \ldots (n-1)\,a_{n-2} & a_{n-1} & 0 \\
0 & a_0 & (n-1)\,a_1 \ldots (n-1)_2a_{n-3} & (n-1)a_{n-2} & a_{n-1} \\
a_1 & (n-1)a_2 & (n-1)_2a_3 \ldots (n-1)\,a_{n-1} & a_n & 0 \\
0 & a_1 & (n-1)\,a_2 \ldots (n-1)_2a_{n-2} & (n-1)a_{n-1} & a_n
\end{array}$$

должны быть равны нулю. Но въ такомъ случаѣ производныя $\frac{df}{dx}$ и $\frac{df}{dy}$ имѣли бы общій множитель $n-2$-й степени, чего конечно не будетъ, пока a_i остаются совершенно произвольными. Въ самомъ дѣлѣ, если всѣ упомянутые опредѣлители 4-го порядка равны нулю, то ур.

$$\begin{aligned}
a_0\lambda \qquad\quad - a_1\lambda' \qquad\qquad &= 0 \\
(n-1)\,a_1\lambda + a_0\mu - (n-1)\,a_2\lambda' - a_1\mu' &= 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&
\end{aligned}$$

могутъ быть удовлетворены величинами λ, μ, λ' μ', не равными нулю. Помноживъ эти $n+1$ ур. соотвѣтственно на x^n, $x^{n-1}y, \ldots xy^{n-1}$, y^n, и взявъ сумму, получимъ:

$$\begin{aligned}
(\lambda x+\mu y)\left\{a_0x^{n-1}+(n-1)\,a_1x^{n-1}y+\ldots\right\}& \\
-(\lambda' x+\mu' y)\left\{a_1x^{n-1}+(n-1)\,a_2x^{n-2}y+\ldots\right\}&=0,
\end{aligned}$$

откуда

$$\frac{a_0x^{n-1}+(n-1)\,a_1x^{n-2}y+\ldots}{\lambda' x+\mu' y}=\frac{a_1x^{n-1}+(n-1)\,a_2x^{n-2}y+\ldots}{\lambda x+\mu y}\ldots \quad (15).$$

Если бы случилось, что $\frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{\mu'}{\mu}$, то изъ предъидущаго ур. слѣдовало бы, что $\frac{df}{dx}$ пропорціонально $\frac{df}{dy}$; если же $\frac{\lambda'}{\lambda}$ не $= \frac{\mu'}{\mu}$, т. е. если знаменатели (15) различныя между собою линейныя выраженія, то обѣ части ур. (15) должны привестись къ одной и той же цѣлой функціи, что и требовалось доказать.

На счетъ втораго предложенія нужно замѣтить, что система ур. (13) будетъ замкнутая, потому-что выраженіе

$$D_{\varkappa\lambda}[D_{\rho\sigma}(\pi)] - D_{\rho\sigma}[D_{\varkappa\lambda}(\pi)]$$

при всѣхъ возможныхъ значеніяхъ $\varkappa$, λ, ρ, σ даетъ либо 0, либо линейныя комбинаціи выраженій $D_{\rho\sigma}(\pi)$. Въ самомъ дѣлѣ, помощью одного дифференцированія находимъ:

$$\begin{aligned}
&D_{00}[D_{01}(\pi)] - D_{01}[D_{00}(\pi)] = D_{01}(\pi)\\
&D_{00}[D_{10}(\pi)] - D_{10}[D_{00}(\pi)] = -D_{10}(\pi)\\
&D_{00}[D_{11}(\pi)] - D_{11}[D_{00}(\pi)] = 0\\
&D_{01}[D_{10}(\pi)] - D_{10}[D_{01}(\pi)] = D_{00}(\pi) - D_{11}(\pi)\\
&D_{01}[D_{11}(\pi)] - D_{11}[D_{01}(\pi)] = D_{01}(\pi)\\
&D_{10}[D_{11}(\pi)] - D_{11}[D_{10}(\pi)] = D_{10}(\pi)\ ^{1}).
\end{aligned}$$

И такъ теорема, что *бинарная форма n-ой степени имѣетъ n — 3 абсолютныя инваріанты* доказана съ надлежащею строгостью. Такъ какъ уравненія, выражающія неизмѣняемость каждой абсолютной инваріанты отъ замѣненія коэффиціентовъ данной формы коэффиціентами преобразованной формы, представляютъ

---

[1]) Эти формулы удобнѣе повѣряются, если взять $f(x, y)$ безъ биноміальныхъ коэффиціентовъ. Принявъ $f(x, y) = \sum_i a_i x^{n-i} y^i$, находимъ:

$$\left[x\frac{df}{dx}\right] = D_{00}(\pi) = \Sigma(n-i)a_i\ \frac{d\Pi}{da_i}, \qquad \left[y\frac{df}{dx}\right] = D_{01}(\pi) = \Sigma(n-i)a_i\ \frac{d\Pi}{da_{i+1}},$$

$$\left[x\frac{df}{dy}\right] = D_{10}(\pi) = \Sigma(i+1)a_{i+1}\frac{d\Pi}{da_i}, \qquad \left[y\frac{df}{dy}\right] = D_{11}(\pi) = \Sigma(i+1)a_{i+1}\frac{d\pi}{da_{i+1}}.$$

$$(i = 0, 1, \ldots n-1).$$

полный результатъ исключенія α, β, γ, δ изъ ур. (2), то отсюда можно теперь заключить, что въ числѣ $n+1$ ур. (2) всегда найдутся 4, рѣшающіяся относительно α, β, γ, δ, потому-что въ противномъ случаѣ число уравненій, получаемыхъ по исключеніи α, β, γ, δ изъ ур. (2), было бы *больше* $n-3$.

Форма 3-й степени $a_0x^3 + 3a_1x^2y + 3a_2xy^2 + a_3y^3$ не имѣетъ ни одной абсолютной инваріанты, потому что опредѣлитель

$$\begin{vmatrix} a_0 & 2a_1 & a_2 & 0 \\ 0 & a_0 & 2a_1 & a_2 \\ a_1 & 2a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & a_1 & 2a_2 & a_3 \end{vmatrix}$$

вообще не равенъ нулю, и слѣдовательно уравненіямъ $D_{\rho\sigma}(\pi) = 0$ нельзя удовлетворить иначе, какъ положивъ

$$\pi_0 = 0,\ \pi_1 = 0,\ \pi_2 = 0,\ \pi_3 = 0.$$

Квадратичная форма $a_0x^2 + 2a_1xy + a_2y^2$ также не имѣетъ абсолютныхъ инваріантъ, потому что при $a_0a_2 - a_1^2$ не $= 0$ ур. $D_{00}(\pi) = a_0\pi_0 + a_1\pi_1 = 0$, $D_{10}(\pi) = a_1\pi_0 + a_2\pi_1$ даютъ $\pi_0 = 0$, $\pi_1 = 0$, а ур. $D_{01}(\pi) = a_0\pi_1 + a_1\pi_2 = 0$, $D_{11}(\pi) = a_1\pi_1 + a_2\pi_2 = 0$ даютъ $\pi_1 = 0, \pi_2 = 0$.

Наконецъ для линейной формы $a_0x + a_1y$ ур. $D_{00}(\pi) = a_0\pi_0 = 0$, $D_{01}(\pi) = a_0\pi_1 = 0$ даютъ непосредственно $\pi_0 = 0$, $\pi_1 = 0$.

§ 2. Уравненія $D_{\rho\sigma}(\pi) = 0$ имѣютъ то замѣчательное свойство, что изъ нихъ можно вывести дифференціальныя ур., которымъ удовлетворяютъ числители и знаменатели опредѣляемыхъ ими раціональныхъ функцій π.

Желая вывести подобныя ур., мы должны конечно предположить, что цѣлыя функціи $p = \varphi(a_i)$ и $q = \psi(a_i)$, составляющія числитель и знаменатель $\pi = \frac{p}{q}$, не имѣютъ общаго множителя. Въ такомъ случаѣ, написавъ ур.

$$D_{\rho\sigma}(\pi) = \frac{q\,D_{\rho\sigma}(p) - pD_{\rho\sigma}(q)}{q^2} = 0$$

въ слѣдующемъ видѣ:

$$\frac{D_{\rho\sigma}(p)}{p}=\frac{D_{\rho\sigma}(q)}{q},$$

заключаемъ, что $D_{\rho\sigma}(p)$ дѣлится на p, а $D_{\rho\sigma}(q)$ на q. А такъ какъ дѣлимыя одинаковой степени съ дѣлителями, то частное будетъ величина, независящая отъ a_i. Обозначивъ это частное чрезъ $\lambda_{\rho\sigma}$, мы получимъ ур.

$$D_{\rho\sigma}(p)=\lambda_{\rho\sigma}\,p,\ldots \quad (1),$$

которымъ должны удовлетворять всѣ числители и знаменатели абсолютныхъ инваріантъ.

Четыре ур. (1) тогда только совмѣстны, когда $\lambda_{01}=\lambda_{10}=0$, а $\lambda_{00}=\lambda_{11}$. Это легко обнаруживается помощью тождественныхъ ур. (9) § 1. Замѣтимъ сперва, что если $p=\varphi(a_i)$ удовлетворяетъ ур. (1), то $P=\varphi(A_i)$ будетъ удовлетворять ур.

$$D_{\rho\sigma}(P)=\lambda_{\rho\sigma}P.$$

Положивъ теперь $\log P=L$, изъ ур. (9) § 1 выводимъ:

$$\frac{D_{00}(P)}{P}=\alpha\frac{dL}{d\alpha}+\gamma\frac{dL}{d\gamma}=\lambda_{00}$$

$$\frac{D_{10}(P)}{P}=\beta\frac{dL}{d\alpha}+\delta\frac{dL}{d\gamma}=\lambda_{10}$$

$$\frac{D_{01}(P)}{P}=\alpha\frac{dL}{d\beta}+\gamma\frac{dL}{d\delta}=\lambda_{01}$$

$$\frac{D_{11}(P)}{P}=\beta\frac{dL}{d\beta}+\delta\frac{dL}{d\delta}=\lambda_{11}.$$

Этими ур. L опредѣляется въ функціи $\alpha,\beta,\gamma,\delta$. Рѣшивъ первыя 2 ур. относительно $\frac{dL}{d\alpha}$, а вторыя относительно $\frac{dL}{d\beta}$, имѣемъ:

$$\frac{dL}{d\alpha}=\frac{1}{r}(\delta\lambda_{00}-\gamma\lambda_{10})$$

$$\frac{dL}{d\beta}=\frac{1}{r}(\delta\lambda_{01}-\gamma\lambda_{11}),$$

откуда

$$\frac{d^2L}{d\alpha d\beta}=\frac{\gamma}{r^2}(\delta\lambda_{00}-\gamma\lambda_{10})=-\frac{\delta}{r^2}(\delta\lambda_{01}-\gamma\lambda_{11}),$$

или

$$\gamma\delta(\lambda_{00}-\lambda_{11})-\gamma^2\lambda_{10}+\delta^2\lambda_{01}=0.$$

Такъ какъ γ и δ совершенно произвольны, то это ур. будетъ удовлетворено только при

$$\lambda_{01}=0,\ \lambda_{10}=0,\ \lambda_{00}=\lambda_{11}=\lambda.$$

Не трудно найти функцію L отъ α, β, γ, δ, удовлетворяющую уравненіямъ

$$\alpha\frac{dL}{d\alpha}+\gamma\frac{dL}{d\gamma}=\lambda,\quad \alpha\frac{dL}{d\beta}+\gamma\frac{dL}{d\delta}=0,$$

$$\beta\frac{dL}{d\alpha}+\delta\frac{dL}{d\gamma}=0,\quad \beta\frac{dL}{d\beta}+\delta\frac{dL}{d\delta}=\lambda.$$

Стоитъ только замѣтить, что при $l=\lambda\log r$ будетъ

$$\alpha\frac{dl}{d\alpha}+\gamma\frac{dl}{d\gamma}=\lambda,\quad \alpha\frac{dl}{d\beta}+\gamma\frac{dl}{d\delta}=0,$$

$$\beta\frac{dl}{d\alpha}+\delta\frac{dl}{d\gamma}=0,\quad \beta\frac{dl}{d\beta}+\delta\frac{dl}{d\delta}=\lambda.$$

Слѣдовательно производныя L равны соотвѣтственнымъ производнымъ l, а потому

$$L=l+C,\ \text{т. е. } \log P=\lambda\log r+\log C,$$

откуда

$$P=Cr^\lambda.$$

Чтобы найти значеніе величины C, независящей отъ α, β, γ, δ, стоитъ только принять $\alpha=1$, $\beta=0$, $\gamma=0$, $\delta=1$, т. е. $x=X$, $y=Y$. Тогда P обратится въ p, а $r=1$, и слѣдовательно будетъ

$$p=C,\ P=r^\lambda p.$$

И такъ всякая цѣлая функція $\varphi(a_i)$, составляющая числитель или знаменатель абсолютной инваріанты, имѣетъ то свойство, что

$$\varphi(A_i) = r^{\lambda}\varphi(a_i), \ldots \quad (2),$$

гдѣ λ очевидно цѣлое число. Эти цѣлыя функціи коэффиціентовъ формы $f(x, y)$ называются просто *инваріантами* этой формы. Свойство, выражаемое ур. (2), обыкновенно принимается за опредѣленіе инваріантъ, а ихъ существованіе въ такомъ случаѣ допускается эмпирически. Число этихъ инваріантъ будетъ очевидно единицею больше числа абсолютныхъ инваріантъ; а слѣдовательно число совокупныхъ дифференціальныхъ уравненій, ихъ опредѣляющихъ, должно быть единицею меньше. Въ самомъ дѣлѣ, цѣлое число λ будетъ различно для различныхъ инваріантъ данной формы, всѣ же онѣ удовлетворяютъ 3-мъ ур.

$$D_{00}(\varphi) = D_{11}(\varphi),\ D_{10}(\varphi) = 0,\ D_{01}(\varphi) = 0 \ldots \quad (3).$$

Не трудно убѣдиться въ томъ, что эти 3 ур. составляютъ также замкнутую систему независимыхъ между собою совокупныхъ ур. съ частными производными, и слѣдовательно отсюда также можно заключить, что число инваріантъ формы n-ой степени равно $n-2$.

Бинарныя формы 2-й и 3-й степеней имѣютъ по одной инваріантѣ, которая можетъ быть получена помощью интегрированія ур. (3), или какимъ угодно другимъ путемъ. Болѣе одной инваріанты ни та, ни другая форма имѣть не могутъ, потому что изъ двухъ инваріантъ φ и ψ тотчасъ получилась бы абсолютная инваріанта $\frac{\varphi^{\mu}}{\psi^{\nu}}$, гдѣ μ и ν цѣлыя числа, выбранныя такимъ образомъ, чтобы степень числителя равнялась степени знаменателя.

Линейная форма $a_0x + a_1y$ не имѣетъ ни одной инваріанты, потому-что ур. $D_{10}(\varphi) = 0$, $D_{01}(\varphi) = 0$ даютъ $\varphi_0 = 0$, $\varphi_1 = 0$.

Уравненія вида (2), число которыхъ при $n > 2$ есть $n-2$, выражаютъ условія преобразуемости данной формы

$$f = a_0x^n + na_1x^{n-1}y + \ldots \text{ въ } F = A_0X^n + nA_1X^{n-1}Y + \ldots$$

помощью подстановки даннаго модуля r.

Изъ нашего опредѣленія инваріантъ, какъ числителей и знаменателей абсолютныхъ инваріантъ, слѣдуетъ, что онѣ суть *одно-*

родныя функціи коэффиціентовъ данной формы. То же самое можно заключить и изъ обыкновеннаго опредѣленія инваріанты, выражаемаго ур. (2): такъ какъ коэффиціенты A_i суть однородныя функціи степени n отъ α, β, γ, δ, то неоднородная функція отъ A_i не могла бы равняться однородной функціи r^λ отъ $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, помноженной на функцію однихъ коэффиціентовъ данной формы.

Цѣлое число λ можетъ быть четное или нечетное. Если λ *четное*, то инваріанта $\varphi(a_i)$ не измѣняется отъ подстановки модуля равнаго -1, и называется *прямою* (invariant direct); если λ *нечетное*, то разсматриваемая инваріанта мѣняетъ знакъ при подстановкѣ модуля равнаго -1, и называется *косою* (invariant gauche). А такъ какъ къ числу подстановокъ модуля -1 принадлежитъ и подстановка

$$x = Y,\ y = X,$$

то можно сказать, что отъ перестановки перемѣнныхъ, или, что одно и то же, отъ написанія коэффиціентовъ формы въ обратномъ порядкѣ, прямая инваріанта не измѣняется, а косая мѣняетъ свой знакъ.

Показатель λ легко опредѣляется по степени формы и степени инваріанты. Если форма $f(x, y)$ n-ой степени, а инваріанта степени ν относительно коэффиціентовъ $f(x, y)$, то по подстановкѣ на мѣсто A_i ихъ выраженій (2) § 1, $\varphi(A_i)$ обратится въ функцію степени $n\nu$ отъ $\alpha, \beta, \gamma, \delta$; а такъ какъ эта функція должна быть тождественна съ $r^\lambda \varphi(a_i)$, то $n\nu = 2\lambda$, откуда

$$\lambda = \frac{n\nu}{2}.$$

Поэтому либо n, либо ν должно быть четное, откуда слѣдуетъ, что бинарныя формы нечетныхъ степеней имѣютъ только инваріанты четнаго порядка.

Число $\frac{n\nu}{2}$ имѣетъ еще другое значеніе. Если напишемъ ρy на мѣсто y, не измѣняя x, то это будетъ подстановка модуля ρ, а коэффиціенты преобразованной формы будутъ

$$a_0,\ a_1\rho, \ldots\ a_i\rho^i, \ldots\ a_n\rho^n.$$

Поэтому должно быть

$$\varphi(a_0,\ a_1\rho, \ldots\ a_i\rho^i, \ldots\ a_n\rho^n) = \rho^\lambda \varphi(a_0,\ a_1, \ldots\ a_i, \ldots\ a_n).$$

Изъ этого тождественнаго уравненія заключаемъ, что если помножить каждый коэффиціентъ a_i на ρ^i, то вся инваріанта помножится на ρ^λ. А для этого необходимо, чтобы сумма значковъ i во всѣхъ членахъ инваріанты была одна и та же и равна $\lambda = \frac{n\nu}{2}$. Эта сумма значковъ, выражаемая числомъ $\frac{n\nu}{2}$, называется *вѣсомъ* инваріанты.

§ 3. Все сказанное объ одной формѣ непосредственно распространяется на какое угодно число формъ. Если требуется опредѣлить, при какихъ условіяхъ формы $u = a_0x^m + ma_1x^{m-1}y + \ldots$, $v = b_0x^n + nb_1x^{n-1}y + \ldots, \ldots$ помощью одной и той же подстановки могутъ быть преобразованы одновременно въ $U = A_0X^m + mA_1X^{m-1}Y + \ldots$, $V = B_0X^n + nB_1X^{n-1}Y + \ldots, \ldots$, то на мѣсто ур. (2) § 1 получимъ нѣсколько системъ подобныхъ ур., изъ которыхъ нужно исключить коэффиціенты подстановки α, β, γ, δ. Это исключеніе опять приведется къ отысканію всѣхъ функцій отъ коэффиціентовъ данныхъ и преобразованныхъ формъ, не зависящихъ отъ $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ и не равныхъ нулю. Функціи эти опредѣлятся четырьмя уравненіями

$$\frac{d\Pi}{d\alpha} = 0,\ \frac{d\Pi}{d\beta} = 0,\ \frac{d\Pi}{d\gamma} = 0,\ \frac{d\Pi}{d\delta} = 0,$$

которыя въ настоящемъ случаѣ по вышеизложенному способу преобразовываются въ слѣдующія:

$$\mathbf{S} D_{\rho\sigma}(\Pi) = 0 \ldots \quad (1),$$

гдѣ

$$\mathbf{S} D_{\rho\sigma}(\Pi) = m\sum_i (m-1)_i \frac{A_{i+\rho}}{m_{i+\sigma}} \frac{d\Pi}{dA_{i+\sigma}} + n\sum_i (n-1)_i \frac{B_{i+\rho}}{n_{i+\sigma}} \frac{d\Pi}{dB_{i+\sigma}} + \ldots$$

Помощью этихъ ур. докажется, что всѣ условія преобразуемости формъ u, $v, \ldots$ въ U, $V, \ldots$ могутъ быть выражены уравненіями слѣдующаго вида:

$$\varphi(A_i,\ B_i, \ldots) = \varphi(a_i,\ b_i, \ldots), \ldots \quad (2),$$

гдѣ $\varphi(A_i, B_i, \ldots)$ раціональная функція отъ $A_i, B_i, \ldots$, удовлетворяющая ур. (1). Функціи $\varphi(a_i, b_i, \ldots)$ будутъ удовлетворять подобнымъ же уравненіямъ

$$\mathfrak{S} D_{\rho\sigma}(\pi) = 0, \ldots \quad (3),$$

гдѣ

$$\mathfrak{S} D_{\rho\sigma}(\pi) = m\Sigma(m-1)_i \frac{a_{i+\rho}}{m_{i+\sigma}} \frac{d\pi}{da_{i+\sigma}} + n\Sigma(n-1)_i \frac{b_{i+\rho}}{n_{i+\sigma}} \frac{d\pi}{db_{i+\sigma}} + \ldots$$

Эти функціи отъ a_i, $b_i, \ldots$, вслѣдствіе свойства (2), называются *абсолютными инваріантами* данной системы формъ. Къ числу ихъ очевидно будутъ принадлежать и абсолютныя инваріанты отдѣльныхъ формъ $u, v, \ldots$ Остальныя же абсолютныя инваріанты системы будутъ зависѣть отъ коэффиціентовъ двухъ или болѣе данныхъ формъ Число сихъ послѣднихъ инваріантъ получится, если вычесть изъ числа всѣхъ абсолютныхъ инваріантъ системы число абсолютныхъ инваріантъ отдѣльныхъ данныхъ формъ. Слѣдовательно опредѣленіе этого числа приводится къ опредѣленію числа всѣхъ абсолютныхъ инваріантъ системы. Для этой цѣли можно воспользоваться дифференціальными уравненіями (3). Эти уравненія составляютъ замкнутую систему, потому-что отдѣльныя слагаемыя суммы $\mathfrak{S} D_{\rho\sigma}(\pi)$ имѣютъ то свойство (§ 1), которое должна имѣть эта сумма для того, чтобы система ур. (3) была замкнутою. Независимость между собою 4-хъ ур. (3) также не требуетъ новаго доказательства, если хоть одна изъ данныхъ формъ 3-й или высшей степени, потому-что въ такомъ случаѣ уже изъ сказаннаго въ § 1 слѣдуетъ, что не всѣ опредѣлители 4-го порядка, составленные изъ коэффиціентовъ ур. (3), равны нулю. Въ этомъ общемъ случаѣ слѣдовательно число абсолютныхъ инваріантъ будетъ *нормальное*, т. е. равно числу коэффиціентовъ данныхъ формъ безъ 4.

Остается разсмотрѣть еще слѣдующіе частные случаи:

1) Если всѣ данныя формы 2-й степени, то достаточно разсмотрѣть систему 2-хъ формъ, чтобы убѣдиться въ томъ, что система квадратичныхъ формъ всегда имѣетъ нормальное число

абсолютныхъ инваріантъ. Въ случаѣ 2-хъ формъ

$$u = a_0x^2 + 2a_1xy + a_2y^2, \quad v = b_0x^2 + 2b_1xy + b_2y^2$$

коэффиціенты ур. (3) будутъ

$$\begin{array}{cccccc} a_0 & a_1 & 0 & b_0 & b_1 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & 0 & b_0 & b_1 \\ a_1 & a_2 & 0 & b_1 & b_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_2 & 0 & b_1 & b_2. \end{array}$$

Если бы всѣ опредѣлители 4-го порядка, составленные изъ этихъ элементовъ, равнялись нулю, то формы

$$a_0x^4 + a_1x^3y + b_0xy^3 + b_1y^4, \quad a_1x^4 + a_2x^3y + b_1xy^3 + b_2y^4$$

имѣли бы общій множитель 3-й степени, чего очевидно не будетъ при произвольныхъ величинахъ коэффиціентовъ данныхъ формъ.

2) Если данная система состоитъ изъ одной квадратичной и нѣсколькихъ линейныхъ формъ, то, составивъ ур. $D_{\rho\sigma}(\pi) = 0$ для 2-хъ формъ $u = a_0x^2 + 2a_1xy + a_2y^2$, $v = b_0x + b_1y$, находимъ, что не всѣ опредѣлители 4-го порядка, составленные изъ коэффиціентовъ этихъ уравненій

$$\begin{array}{ccccc} a_0 & a_1 & 0 & b_0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & 0 & b_0 \\ a_1 & a_2 & 0 & b_1 & 0 \\ 0 & a_1 & a_2 & 0 & b_1 \end{array}$$

равны нулю. Наприм. $\begin{vmatrix} a_0 & b_0 & 0 & 0 \\ a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & b_0 \\ 0 & 0 & a_2 & b_1 \end{vmatrix} = (a_0b_1 - a_1b_0)(a_1b_1 - a_2b_0).$

Слѣдовательно и въ этомъ случаѣ данная система имѣетъ нормальное число абсолютныхъ инваріантъ.

3) Если данная система состоитъ изъ *двухъ* линейныхъ формъ $a_0x + a_1y$, $b_0x + b_1y$, то уравненія

$$\mathsf{S}D_{00}(\pi) = a_0\frac{d\pi}{da_0} + b_0\frac{d\pi}{db_0} = 0,$$

$$\mathsf{S}D_{10}(\pi) = a_1\frac{d\pi}{da_0} + b_1\frac{d\pi}{db_0} = 0$$

даютъ: $\frac{d\pi}{da_0} = 0$, $\frac{d\pi}{db_0} = 0$; а ур. $\mathfrak{S} D_{01}(\pi) = 0$, $\mathfrak{S} D_{11}(\pi) = 0$ подобнымъ образомъ даютъ $\frac{d\pi}{da_1} = 0$, $\frac{d\pi}{db_1} = 0$. Слѣдовательно, 2 линейныя формы не имѣютъ ни одной абсолютной инваріанты. Отсюда же можно заключить, такъ какъ опредѣлитель, составленный изъ коэффиціентовъ ур. $\mathfrak{S} D_{\rho\sigma}(\pi) = 0$, не равенъ нулю, что система 3-хъ или болѣе линейныхъ формъ имѣетъ нормальное число абсолютныхъ инваріантъ.

Переходъ отъ абсолютныхъ инваріантъ къ обыкновеннымъ совершается такимъ же образомъ, какъ въ случаѣ *одной* формы. Если данная система формъ имѣетъ абсолютныя инваріанты, то число обыкновенныхъ инваріантъ будетъ единицею больше числа абсолютныхъ. Если же данная система формъ не имѣетъ абсолютныхъ инваріантъ, т. е. если она состоитъ изъ 2-хъ линейныхъ формъ $a_0x = a_1y$ и $b_0x + b_1y$, то опредѣлитель

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{vmatrix} .$$

есть инваріанта системы, потому что, положивъ

$$\begin{aligned} a_0x + a_1y &= (a_0\alpha + a_1\gamma)\,X + (a_0\beta + a_1\delta)\,Y = A_0X + A_1Y \\ b_0x + b_1y &= (b_0\alpha + b_1\gamma)\,X + (b_0\beta + b_1\delta)\,Y = B_0X + B_1Y, \end{aligned}$$

имѣемъ

$$\begin{vmatrix} A_0 & A_1 \\ B_0 & B_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_0\alpha + a_1\gamma & a_0\beta + a_1\delta \\ b_0\alpha + b_1\gamma & b_0\beta + b_1\delta \end{vmatrix} = r \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{vmatrix}.$$

И такъ число инваріантъ какой ни есть бинарной формы или системы бинарныхъ формъ равно числу коэффиціентовъ данныхъ формъ безъ трехъ, *исключая* только 2-го случая: *одной* квадратичной и *одной* линейной формы, изъ которыхъ первая имѣетъ одну инваріанту, хотя число коэффиціентовъ равно только 3, а вторая имѣетъ 0 инваріантъ, между тѣмъ какъ по общему правилу число ея инваріантъ выходитъ $= -1$.

Не трудно теперь опредѣлить число инваріантъ данной системы формъ, заключающихъ въ себѣ коэффиціенты нѣсколькихъ формъ. Пусть будутъ $m, n, \ldots$ степени данныхъ формъ, а число ихъ $= \mu$, тогда число всѣхъ инваріантъ системы равно $m + n + \ldots + \mu - 3$. Если въ числѣ данныхъ формъ нѣтъ ни линейныхъ, ни квадратичныхъ формъ, то число инваріантъ первой формы равно $m - 2$, число инваріантъ второй равно $n - 2$, и т. д., и слѣдовательно число всѣхъ инваріантъ отдѣльныхъ формъ равно $m + n + \ldots - 2\mu$, а поэтому число инваріантъ, зависящихъ отъ коэффиціентовъ двухъ или болѣе формъ, будетъ $3(\mu - 1)$. Если же въ числѣ данныхъ μ формъ есть ν квадратичныхъ и ν' линейныхъ формъ, то число этихъ инваріантъ будетъ $3(\mu-1)-\nu-\nu'$. Онѣ могутъ быть составлены весьма различнымъ образомъ изъ коэффиціентовъ данныхъ формъ. Достаточно однако разсматривать только инваріанты, однородныя относительно коэффиціентовъ каждой формы, потому что всѣ прочія изъ нихъ составляются линейно. Въ самомъ дѣлѣ, пусть будутъ

$$u = a_0 x^m + m a_1 x^{m-1} y + \ldots, \quad v = b_0 x^n + n b_1 x^{n-1} y + \ldots, \ldots$$

данныя формы, которыя отъ подстановки

$$x = \alpha X + \beta Y, \quad y = \gamma X + \delta Y \ldots \quad (4)$$

переходятъ въ

$$U = A_0 X^m + m A_1 X^{m-1} Y + \ldots, \quad V = B_0 X^n + n B_1 X^{n-1} Y + \ldots$$

а $\varphi(a_i, b_i, \ldots)$ — инваріанта, неоднородная относительно коэффиціентовъ u. По свойству инваріантъ будетъ

$$\varphi(A_i, B_i, \ldots) = r^\lambda \varphi(a_i, b_i, \ldots) \ldots \quad (5).$$

Если помножимъ всѣ коэффиціенты u на ρ, то коэффиціенты U также помножатся на ρ (ур. 2 § 1), и послѣднее ур. обратится въ слѣдующее:

$$\varphi(\rho A_i, B_i, \ldots) = r^\lambda \varphi(\rho a_i, b_i, \ldots).$$

Расположивъ это уравненіе по степенямъ произвольной величины ρ, имѣемъ:

$$\rho^\mu\varphi_\mu(A_i,\ B_i,\ldots)+\rho^\nu\varphi_\nu(A_i,\ B_i,\ldots)+\ldots$$
$$=r^\lambda\{\rho^\mu\varphi_\mu(a_i,\ b_i,\ldots)+\rho^\nu\varphi_\nu(a_i,\ b_i,\ldots)+\ldots\}\ldots \quad (6),$$

гдѣ μ, ν,... различныя цѣлыя числа. Сравнивая въ этомъ уравненіи, тождественномъ относительно ρ, коэффиціенты при одинаковыхъ степеняхъ ρ, мы находимъ:

$$\left.\begin{aligned}\varphi_\mu(A_i,\ B_i,\ldots)&=r^\lambda\varphi_\mu(a_i,\ b_i,\ldots)\\ \varphi_\nu(A_i,\ B_i,\ldots)&=r^\lambda\varphi_\nu(a_i,\ b_i,\ldots)\\ \ldots\ldots\ldots&\ldots\ldots\ldots\end{aligned}\right\}\ldots \quad (7).$$

При $\rho=1$, ур. (6) опять обращается въ (5); φ_μ, φ_ν,... суть ничто иное, какъ слагаемыя, сумма которыхъ $=\varphi$; каждое изъ этихъ слагаемыхъ — однородная функція коэффиціеноовъ u, и притомъ инваріанта, что обнаруживается ур. (7). Если эти инваріанты не однородны относительно коэффиціентовъ v, то можно опять разложить ихъ на нѣсколько инваріантъ, однородныхъ относительно коэффиціентовъ v, и т. д., пока не получатся инваріанты однородныя относительно коэффиціентовъ каждой формы.

Для опредѣленія цѣлаго числа λ (ур. 5) стоитъ только замѣтить, что если $\varphi(a_i,\ b_i,\ldots)$ инваріанта степени μ относительно a_i, степени ν относительно b_i, и т. д., и притомъ *однородная* функція коэффиціентовъ каждой формы, то $\varphi(A_i,\ B_i,\ldots)$ будетъ степени $m\mu+n\nu+\ldots$ относительно α, β, γ, δ, а поэтому, такъ какъ

$$\varphi(A_i,\ B_i,\ldots)=r^\lambda\varphi(a_i,\ b_i,\ldots),$$

λ должно быть равно $\frac{1}{2}\{m\mu+n\nu+\ldots\}$. Не трудно также обнаружить, помощью замѣненія y чрезъ ρy, что вѣсъ всѣхъ членовъ инваріантъ совокупныхъ формъ одинъ и тотъ же и равенъ λ, т. е. $\frac{1}{2}(m\mu+n\nu+\ldots)$.

§ 4. Если мы присоединимъ къ данной системѣ формъ $u=a_0x^m+ma_1x^{m-1}y+\ldots$, $v=b_0x^n+\ldots$,... линейную форму

$\xi x + \eta y$, то число коэффиціентовъ, а слѣдовательно и число инваріантъ системы увеличится на 2. Это справедливо и въ томъ случаѣ, когда данная система состоитъ изъ одной формы степени выше 2. Такъ какъ отдѣльная линейная форма не имѣетъ инваріантъ, то обѣ эти новыя инваріанты будутъ функціи отъ ξ, η и коэффиціентовъ одной или нѣсколькихъ изъ данныхъ формъ: обозначимъ ихъ чрезъ $\varphi(a_i, b_i, \ldots \xi, \eta)$ и $\psi(a_i, b_i, \ldots \xi, \eta)$. Положивъ

$$\xi x + \eta y = (\xi\alpha + \eta\gamma) X + (\xi\beta + \eta\delta) Y = \Xi X + \mathrm{H} Y,$$

будемъ имѣть:

$$\left.\begin{array}{l} \varphi(A_i, B_i, \ldots \Xi, \mathrm{H}) = r^\lambda \varphi(a_i, b_i, \ldots \xi, \eta) \\ \psi(A_i, B_i, \ldots \Xi, \mathrm{H}) = r^\mu \psi(a_i, b_i, \ldots \xi, \eta) \end{array}\right\} \ldots \quad (1).$$

Откинувъ опять форму $\xi x + \eta y$, мы можемъ разсматривать ξ и η какъ перемѣнныя, связанныя съ Ξ и H уравненіями

$$\Xi = \alpha\xi + \gamma\eta, \quad \mathrm{H} = \beta\xi + \delta\eta \ldots \quad (2).$$

Пока эта связь не нарушена, ур. (1) остаются справедливыми. Въ самомъ дѣлѣ, первыя части обращаются тождественно во вторыя, если подставить на мѣсто A_i, $B_i, \ldots$ ихъ выраженія въ функціи a_i, $b_i, \ldots$ и α, β, γ, δ, а на мѣсто Ξ и H выраженія (2), откуда бы ни взялись ξ и η.

Замѣтимъ теперь, что между $y, -x$ и $Y, -X$ существуетъ подобная же связь, какъ между ξ, η и Ξ, H. Въ самомъ дѣлѣ, рѣшивъ ур.

$$x = \alpha X + \beta Y, \quad y = \gamma X + \delta Y,$$

находимъ:

$$X = \frac{1}{r}(\delta x - \beta y), \quad Y = \frac{1}{r}(-\gamma x + \alpha y);$$

а эти 2 ур. могутъ быть представлены въ слѣдующемъ видѣ:

$$Y = \frac{1}{r}\Big\{\alpha y + \gamma(-x)\Big\}, \quad -X = \frac{1}{r}\Big\{\beta y + \delta(-x)\Big\} \ldots \quad (3).$$

Слѣдовательно, ничто не мѣшаетъ написать въ ур. (1) y и $-x$ на мѣсто ξ и η, а Y и $-X$ на мѣсто Ξ и H. Такъ какъ можно предположить, что φ и ψ однородныя функціи отъ ξ и η, то знаменатель r въ выраженіяхъ (3) будетъ имѣть вліяніе только на показатели λ и μ. И такъ будетъ

$$\varphi(A_i, B_i, \ldots Y, -X) = r^{\lambda'}\varphi(a_i, b_i, \ldots y, -x)$$
$$\varphi(A_i, B_i, \ldots Y, -X) = r^{\mu'}\psi(a_i, b_i, \ldots y, -x).$$

Эти соображенія доказываютъ существованіе двухъ независимыхъ между собою функцій отъ коэффиціентовъ данныхъ формъ и самихъ перемѣнныхъ, пріобрѣтающихъ только множитель, равный нѣкоторой степени модуля, когда коэффиціенты данныхъ формъ и первоначальныя перемѣнныя замѣняются коэффиціентами преобразованныхъ формъ и новыми перемѣнными. Эти функціи называются *коваріантами*. Къ числу ихъ принадлежатъ и данныя формы. Если число послѣднихъ болѣе 2-хъ, то можно разсматривать какія угодно двѣ какъ независимыя коваріанты системы; если даны двѣ формы, то онѣ сами же представляютъ систему независимыхъ коваріантъ; если дана только одна форма, то она одна изъ двухъ коваріантъ. Само собою разумѣется, что данная форма или система формъ можетъ имѣть гораздо болѣе коваріантъ; но въ такомъ случаѣ всѣ онѣ суть алгебрическія функціи двухъ изъ нихъ. Только квадратичная и линейная форма не имѣютъ другихъ коваріантъ кромѣ самихъ себя. Въ самомъ дѣлѣ, квадратичная форма $u = a_0x^2 + 2a_1xy + a_2y^2$ имѣетъ одну инваріанту, а система 2-хъ формъ u и $\xi x + \eta y$ только 2, слѣдовательно только одна изъ инваріантъ этой системы будетъ зависѣть отъ ξ и η: эта инваріанта обратится въ u, если напишемъ y и $-x$ на мѣсто ξ и η. Линейная форма $u = a_0x + a_1y$ не имѣетъ вовсе инваріантъ, а система двухъ формъ u и $\xi x + \eta y$ только одну; эта инваріанта зависитъ отъ ξ и η и обращается въ u отъ замѣненія ξ и η перемѣнными y и $-x$.

Изъ всѣхъ возможныхъ коваріантъ достаточно разсматривать только тѣ, которыя однородны относительно коэффиціентовъ каждой формы, потому-что изъ нихъ всѣ прочія составляются линейно. Это доказывается для коваріантъ точно такъ же, какъ для инваріантъ (см. конецъ § 3). Пусть степень коваріанты $\psi(a_i, b_i, \ldots x, y)$ относительно x и y будетъ σ, а степени ея относительно $a_i, b_i, \ldots$ соотвѣтственно $\mu, \nu, \ldots$, тогда изъ ур.

$$\varphi(A_i, B_i, \ldots X, Y) = r^\lambda \varphi(a_i, b_i, \ldots x, y),$$

которое обращается въ тождество отъ подстановки на мѣсто $A_i, B_i, \ldots x, y$ ихъ выраженій въ функціи $a_i, b_i, \ldots X, Y$ и $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, не трудно усмотрѣть, что

$$\lambda = \tfrac{1}{2}(m\mu + n\nu + \ldots - \sigma).$$

Инваріантами и коваріантами совокупныхъ формъ можно пользоваться и при изслѣдованіи отдѣльныхъ формъ. Пусть будетъ $\varphi(a_i, b_i, x, y)$ коваріанта формъ u и v, т. е.

$$\varphi(A_i, B_i, X, Y) = r^\lambda \varphi(a_i, b_i, x, y) \ldots \quad (8).$$

Въ частномъ случаѣ, когда не войдутъ перемѣнныя, это будетъ инваріанта. Предположимъ теперь, что v есть коваріанта u; тогда будетъ

$$B_0 X^n + nB_1 X^{n-1} Y + \ldots = r^\mu (b_0 x^n + nb_1 x^{n-1} y + \ldots),$$

гдѣ $b_0, b_1, \ldots$ цѣлыя однородныя функціи одинаковаго измѣренія отъ $a_0, a_1, \ldots$; и такъ какъ ур. (8) справедливо при всякихъ b_i, то будемъ имѣть въ этомъ случаѣ

$$\begin{aligned}\varphi(A_i, B_i, X, Y) &= r^\lambda \varphi(a_i, r^\mu b_i, x, y)\\ &= r^{\lambda+\gamma\mu} \varphi(a_i, b_i, x, y),\end{aligned}$$

полагая, что φ однородная функція степени γ отъ коэффиціентовъ v. Отсюда заключаемъ, что если мы имѣемъ инваріанту или коваріанту двухъ независимыхъ между собою формъ u и v, и если u имѣетъ коваріанту одной степени съ v, то можемъ получить тотчасъ инваріанту или коваріанту формы u, взявъ на мѣсто формы v упомянутую коваріанту u.

Подобнымъ образомъ можно доказать, что если мы имѣемъ инваріанту или коваріанту k совокупныхъ формъ, и замѣнимъ одну изъ этихъ формъ коваріантою остальныхъ, одинаковой съ нею степени, то получимъ инваріанту или коваріанту остальныхъ $k-1$ формъ.

§ 5. При выводѣ инваріантъ и коваріантъ и ихъ взаимныхъ соотношеній, я пользуюсь способомъ символическихъ изображеній Аронгольда и Клебша. По этому способу данныя формы изображаются въ видѣ цѣлыхъ положительныхъ степеней биномовъ $a_1x_1 + a_2x_2, a'_1x_1 + a'_2x_2, \ldots b_1x_1 + b_2x_2, \ldots$, показатели которыхъ равны степени формы. Такимъ образомъ будемъ имѣть:

$$u = (a_1x_1 + a_2x_2)^m, \text{ или } u = (a'_1x_1 + a'_2x_2)^m, \text{ или } u = (b_1x_1 + b_2x_2)^m, \ldots$$

Чтобы перейти отъ символическихъ выраженій къ самой формѣ, нужно замѣнить степени и произведенія

$$\begin{array}{llll} & a_1^m, & a_1^{m-1}a_2, \ldots\ldots & a_2^m, \\ \text{или} & a'^m_1, & a'^{m-1}_1 a'_2, \ldots\ldots & a'^m_2, \\ \text{»} & b_1^m, & b_1^{m-1}b_2, \ldots\ldots & b_2^m. \end{array}$$

данными коэффиціентами формы

$$\mathfrak{a}_0, \qquad \mathfrak{a}_1, \ldots\ldots\ldots \mathfrak{a}_m.$$

Для сокращенія письма, Клебшъ обозначаетъ еще $a_1x_1 + a_2x_2$ чрезъ a_x, $a'_1x_1 + a'_2x_2$ чрезъ $a'_x, \ldots b_1x_1 + b_2x_2$ чрезъ $b_x, \ldots$ Поэтому символически будетъ:

$$u = a_x^m = a'^m_x = \ldots = b_x^m = \ldots$$

Когда мы будемъ имѣть дѣло въ одно время съ нѣсколькими формами, то для каждой формы будемъ употреблять постоянно одну и ту же букву; напр.

$$u = a_x^m = a'^m_x = \ldots, \ v = b_x^n = b'^n_x = \ldots$$

Формулы (2) § 1 весьма просто выражаются символически. Пусть будетъ $x_1 = \lambda_1 X_1 + \mu_1 X_2$, $x_2 = \lambda_2 X_1 + \mu_2 X_2 \ldots$ (1), тогда

$$(a_1 x_1 + a_2 x_2)^m = [(a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2) X_1 + (a_1\mu_1 + a_2\mu_2) X_2]^m$$
$$= (a_\lambda X_1 + a_\mu X_2)^m, \ldots \quad (2),$$

гдѣ согласно съ принятымъ нами обозначенiемъ

$$a_\lambda = a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2, \; a_\mu = a_1\mu_1 + a_2\mu_2.$$

Уравненiе (2) тождественно относительно a_1 и a_2, слѣдовательно можно замѣнить степени и произведенiя

$$a_1^m, \qquad a_1^{m-1}a_2, \ldots\ldots a_2^m$$

коэффицiентами

$$\mathfrak{a}_0, \qquad \mathfrak{a}_1, \ldots\ldots\ldots \mathfrak{a}_m$$

формы u. Отъ этого $(a_1x_1 + a_2x_2)^m$ обращается въ $\mathfrak{a}_0 x_1^m + m\mathfrak{a}_1 x_1^{m-1} x_2 + \ldots$ равное $\mathfrak{A}_0 X_1^m + m\mathfrak{A}_1 X_1^{m-1} X_2 + \ldots$ и слѣдовательно, въ силу уравненiя (2), выраженiя a_λ^m, $a_\lambda^{m-1}a_\mu, \ldots a_\mu^m$ должны перейти въ настоящiя выраженiя коэффицiентовъ преобразованной формы $\mathfrak{A}_0$, $\mathfrak{A}_1, \ldots$ Не трудно убѣдиться, что эти выраженiя согласны съ формулами (2) § 1.

Для облегченiя перехода отъ символическихъ выраженiй къ настоящимъ, условимся еще обозначать чрезъ u_1 и u_2 первыя производныя формы u, дѣленныя на m, чрезъ u_{11}, u_{12}, u_{22}, — вторыя производныя u, дѣленныя на $m(m-1)$, и т. д. Тогда вообще символическое выраженiе производной k-го порядка будетъ

$$u_{\alpha\beta\gamma\ldots} = a_x^{m-k} a_\alpha a_\beta a_\gamma \ldots \quad (3),$$

гдѣ число значковъ α, β, $\gamma, \ldots$ должно быть k.

Всякая цѣлая однородная функцiя опредѣлителей 2-го порядка, составленныхъ изъ коэффицiентовъ линейныхъ выраженiй a_x, b_x, $c_x, \ldots$, будетъ очевидно инварiанта этихъ линейныхъ выраженiй, потому что каждый изъ этихъ опредѣлителей, при замѣненiи коэффицiентовъ данныхъ линейныхъ выраженiй коэффиціентами преобразованныхъ выраженій, обращается въ произведеніе модуля на прежній опредѣлитель, и если соблюдена однородность, то нѣкоторая степень модуля выйдетъ за скобку какъ общій множитель. Для краткости мы будемъ обозначать опредѣлитель $a_1b_2 - a_2b_1$ чрезъ (ab), опредѣлитель $a_1c_2 - a_2c_1$ чрезъ (ac) и т. д.; тогда упомянутая цѣлая функція будетъ имѣть видъ

$$(ab)^{\rho}(ac)^{\sigma}(bc)^{\tau}\ldots + (ab)^{\rho'}(ac)^{\sigma'}(bc)^{\tau'}\ldots + \ldots \quad (4),$$

гдѣ должно быть $\rho+\sigma+\tau+\ldots=\rho'+\sigma'+\tau'+\ldots=\ldots=\omega$. Отъ подстановки (1) $a_x = a_1x_1 + a_2x_2$ переходитъ въ $A_1X_1 + A_2X_2$, гдѣ $A_1 = a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2 = a_\lambda$, $A_2 = a_1\mu_1 + a_2\mu_2 = a_\mu$, и т. д., а слѣдовательно

$$(AB) = a_\lambda b_\mu - a_\mu b_\lambda = r(ab),\ (AC) = a_\lambda c_\mu - a_\mu c_\lambda = r(ac),$$

. . . .

Поэтому

$$(AB)^{\rho}(AC)^{\sigma}(BC)^{\tau}\ldots+\ldots = r^{\omega}\{(ab)^{\rho}(ac)^{\sigma}(bc)^{\tau}\ldots+\ldots\},\ldots \quad (5)$$

чѣмъ и обнаруживается, что выраженіе (4) есть инваріанта линейныхъ формъ a_x, b_x, $c_x, \ldots$

Это же самое выраженіе можетъ быть разсматриваемо какъ символическое выраженіе нѣкоторой инваріанты системы формъ высшихъ степеней, если оно однородно порознь относительно a_1 и a_2, относительно b_1 и b_2, и т. д. Въ самомъ дѣлѣ, пусть

измѣреніе	его	относительно	величинъ	a	будетъ	m
»	»	»	»	b	»	n
»	»	»	»	c	»	p

. . . . ,

гдѣ между числами m, n, $p, \ldots$ могутъ быть и равныя. Уравненіе (5), въ которомъ A_1, A_2, $B_1, \ldots$ означаютъ извѣстныя линейныя выраженія, *тождественно* относительно каждой пары величинъ $a_1 a_2$, $b_1 b_2 \ldots$ Слѣдовательно, оно останется справедливымъ, если мы замѣнимъ произведенія

$$a_1^m, \qquad a_1^{m-1}a_2, \ldots\ldots a_2^m$$

коэффиціентами

$$\mathfrak{a}_0, \qquad \mathfrak{a}_1, \ldots\ldots\ldots \mathfrak{a}_m$$

формы $u = \mathfrak{a}_0 x_1^m + m\mathfrak{a}_1 x_1^{m-1}x_2 + \ldots + \mathfrak{a}_m x_2^m = \mathfrak{A}_0 X_1^m + m\mathfrak{A}_1 X_1^{m-1}X_2 + \ldots + \mathfrak{A}_m X_2^m$, произведенія

$$b_1^n, \qquad b_1^{n-1}b_2, \ldots\ldots b_2^n$$

коэффиціентами

$$\mathfrak{b}_0, \qquad \mathfrak{b}_1, \ldots\ldots\ldots \mathfrak{b}_n$$

формы $v = \mathfrak{b}_0 x_1^n + n\mathfrak{b}_1 x_1^{n-1}x_2 + \ldots = \mathfrak{B}_0 X_1^n + n\mathfrak{B}_1 X_1^{n-1}X_2 + \ldots$, произведенія

$$c_2^p, \qquad c_1^{p-1}c_2, \ldots\ldots c_2^p$$

коэффиціентами

$$\mathfrak{c}_0, \qquad \mathfrak{c}_1, \ldots\ldots\ldots \mathfrak{c}_p$$

формы $w = \mathfrak{c}_0 x_1^p + p\mathfrak{c}_1 x_1^{p-1}x_2 + \ldots = \mathfrak{C}_0 X_1^p + p\mathfrak{C}_1 X_1^{p-1}X_2 + \ldots$

. . . .

А отъ этого $A_1^m = a_\lambda^m$ обращается въ $\mathfrak{A}_0$, $A_1^{m-1}A_2 = a_\lambda^{m-1}a_\mu$ въ $\mathfrak{A}_1, \ldots B_1^n = b_\lambda^n$ въ $\mathfrak{B}_0$, и т. д., и слѣдовательно 1-я часть ур. (5) обратится въ такую же функцію отъ коэффиціентовъ преобразованныхъ формъ, какъ функція коэффиціентовъ первоначальныхъ формъ получилась во второй части, чѣмъ и доказано, что эта послѣдняя функція есть инваріанта совокупныхъ формъ.

Въ частномъ случаѣ, когда $m = n = p \ldots$, можно получить изъ выраженія (4) инваріанту одной формы u, принявъ всѣ остальныя формы v, $w, \ldots$ за тождественныя съ u, если только отъ этого предположенія разсматриваемая инваріанта не обращается въ нуль. Наприм. $(ab)^2$ есть выраженіе инваріанты двухъ квадратичныхъ формъ

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2, \; b_{11}x_1^2 + 2b_{12}x_1x_2 + b_{22}x_2^2,$$

если примемъ $a_i a_k = a_{ik}$, а $b_i b_k = b_{ik}$; а если примемъ $a_i a_k = b_i b_k = a_{ik}$, то это будетъ инваріанта одной квадр. формы $a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$. Подобнымъ образомъ $(ab)^3$ есть символическое выраженіе инваріанты двухъ кубическихъ формъ

$$a_{111}x_1^3 + 3a_{112}x_1^2x_2 + \ldots, \quad b_{111}x_1^3 + 3b_{112}x_1^2x_2 + \ldots,$$

если примемъ $a_i a_k a_l = a_{ikl}$, а $b_i b_k b_l = b_{ikl}$; если же примемъ $a_i a_k a_l = b_i b_k b_l = a_{ikl}$, то получимъ нуль.

§ 6. Всякая цѣлая функція опредѣлителей (ab), (ac), (bc), ... и самихъ биномовъ a_x, b_x, c_x ..., однородная относительно опредѣлителей, будетъ коваріанта этихъ линейныхъ формъ. Мы будемъ однако считать за *одну* коваріанту только такое выраженіе, всѣ слагаемыя котораго суть одинаковаго измѣренія относительно a_x, b_x, c_x, ... Если теперь данная коваріанта линейныхъ формъ однородная функція степени m отъ a_1 и a_2, однородная же функція степени n отъ b_1 и b_2, и т. д., то сдѣлавъ опять символическія подстановки, обозначенныя въ предъидущемъ §, мы получимъ коваріанту данной системы формъ $u, v, w,$... А если $m = n = p$..., то принявъ $u = v = w = \ldots$, получимъ коваріанту формы u (если не нуль). Доказательство совершенно подобно предъидущему.

На основаніи этой теоремы во многихъ случаяхъ не трудно получить непосредственно нѣсколько коваріантъ данной системы формъ, составивъ изъ опредѣлителей 2-го порядка и линейныхъ биномовъ a_x, b_x, ... выраженія, удовлетворяющія извѣстнымъ условіямъ, и разсматривая произведенія, составленныя изъ различныхъ паръ величинъ a_1 a_2, b_1 b_2, ... какъ символическія изображенія коэффиціентовъ данныхъ формъ. Эти коваріанты могутъ быть также изображаемы символически въ видѣ цѣлыхъ степеней нѣкоторыхъ новыхъ линейныхъ биномовъ, чѣмъ значительно облегчается выводъ дальнѣйшихъ коваріантъ и инваріантъ данныхъ формъ, такъ какъ каждую найденную коваріанту можно присоединить къ данной системѣ формъ и составлять потомъ инваріанты и коваріанты дополненной такимъ образомъ системы, какъ будто бы всѣ формы были независимы между собою. По доказанному въ концѣ § 4, всѣ получаемыя такимъ образомъ выраженія будутъ инваріанты и коваріанты данной системы формъ.

Если даны двѣ или болѣе формъ $u = a_x^m = \ldots$, $v = b_x^n = \ldots$, то можно получить первыя коваріанты изъ выраженія

$$(ab)^k a_x^{m-k} b_x^{n-k},$$

давая k всѣ цѣлыя положительныя значенія, непревосходящія ни m, ни n; а въ случаѣ одной только формы $u = a_x^m = b_x^m = ..$ за первую коваріанту можно взять простѣйшую, вытекающую изъ выраженія

$$(ab)^k a_x^{m-k} b_x^{m-k} \ldots \quad (1).$$

Тутъ k должно быть четное. Имѣя одну коваріанту степени p и изобразивъ ее чрезъ α_x^p, получимъ дальнѣйшія коваріанты по формулѣ $(a\alpha)^l a_x^{m-l} \alpha_x^{p-l}$, и т. д.

Возьмемъ для примѣра кубическую форму

$$u = a_{111} x_1^3 + 3a_{112} x_1^2 x_2 + 3a_{122} x_1 x_2^2 + a_{222} x_2^3 = a_x^3 = b_x^3 = c_x^3.$$

Формула (1) даетъ коваріанту

$$h = (ab)^2 a_x b_x \quad (a_i a_k a_l = b_i b_k b_l = a_{ikl}).$$

Изобразивъ ее чрезъ α_x^2, или $\beta_x^2, \ldots$, мы можемъ составить инваріанту

$$\tfrac{1}{2}(\alpha\beta)^2$$

этой квадратичной формы; далѣе, разсматривая одновременно u и h, получимъ еще новыя коваріанты

$$(a\alpha) a_x^2 \alpha_x, \quad (a\alpha)^2 a_x.$$

Соединяя теперь форму u съ кубическою инваріантою $(a\alpha) a_x^2 \alpha_x = p_x^3 = \ldots$, мы получимъ инваріанту $(ap)^3$, и т. д.

Инваріанты и коваріанты, выраженныя въ символахъ, относящихся къ различнымъ коваріантамъ, не могутъ быть сравниваемы непосредственно. Такъ, напримѣръ, инваріанта $\frac{1}{2}(\alpha\beta)^2$ выражена въ символахъ α и β, относящихся къ квадратичной коваріантѣ h, а $(ap)^3$ — въ символахъ, относящихся соотвѣтственно къ данной формѣ и къ кубической коваріантѣ. Поэтому нельзя рѣшить непосредственно, представляютъ ли эти два выраженія одинаковой (четвертой) степени въ коэффиціентахъ одну и ту же инваріанту, или разныя, и какія, въ послѣднемъ случаѣ, между ними существуютъ соотношенія: нужно ввести въ выраженіе $(ap)^3$ вмѣсто a и p α и β, или въ оба выраженія $\frac{1}{2}(\alpha\beta)^2$ и $(ap)^3$ на мѣсто p, α, β символы a, b, c, ... Въ теоріи кубической формы съ двумя перемѣнными обнаруживается, что $\frac{1}{2}(\alpha\beta)^2$ и $(ap)^3$ одна и та же инваріанта [1]). Для объясненія способа вводить символы данной формы на мѣсто символовъ коваріантъ, или символовъ простѣйшихъ коваріантъ на мѣсто символовъ болѣе сложныхъ коваріантъ, вычислимъ теперь окончательное выраженіе линейной коваріанты $l = (a\alpha)^2 a_x$, или $l = (c\alpha)^2 c_x$.

Дифференцируя уравненіе

$$\alpha_x^2 = (ab)^2 a_x b_x \ldots \quad (2)$$

по x_1, находимъ

$$2\alpha_x \alpha_1 = (ab)^2 \{a_x b_1 + b_x a_1\}.$$

Такъ какъ a и b имѣютъ одинаковое символическое значеніе, то можно написать вмѣсто этого

$$\alpha_x \alpha_1 = (ab)^2 a_x b_1.$$

Подобнымъ образомъ будетъ

$$\alpha_x \alpha_2 = (ab)^2 a_x b_2.$$

Помноживъ эти уравненія соотвѣтственно на $-c_2$ и c_1, получимъ въ суммѣ:

$$\alpha_x (c\alpha) = (ab)^2 a_x (cb) \ldots \quad (3).$$

---

[1]) См. замѣтку «О формахъ 3-й и 4-й степеней съ двумя перемѣнными», напечатанную въ 3-мъ томѣ Математическаго сборника; тамъ можно найти множество примѣровъ замѣненія однихъ символовъ другими.

Здѣсь c_1 и c_2 не имѣютъ пока никакого символическаго значенія, а играютъ роль произвольныхъ множителей. Но если мы помножимъ это уравненіе на c_x^2, — что приводится къ замѣненію c_1 и c_2 величинами $c_1c_x^2$ и $c_2c_x^2$, т. е. производными u, дѣленными на 3, то получимъ равенство

$$(c\alpha)\, c_x^2\alpha_x = (ab)^2\,(cb)\, a_x c_x^2,$$

въ которомъ можно разсматривать c_1 и c_2 какъ символы, относящіеся къ u. Въ такомъ случаѣ это будетъ окончательное выраженіе кубической коваріанты.

Дифференцируя еще разъ ур. (3), мы получимъ

$$(c\alpha)^2 = (ab)^2\,(ca)\,(cb),$$

откуда

$$l = (c\alpha)^2 c_x = (ab)^2\,(ca)\,(cb)\, c_x.$$

Это окончательное выраженіе линейной коваріанты. Такъ какъ символы a, b, c имѣютъ одинакое значеніе $a_ia_ka_l = b_ib_kb_l = c_ic_kc_l = a_{ikl}$, то можно переставлявать ихъ какъ угодно, и поэтому будетъ

$$(ab)^2\,(ca)\,(cb)\, c_x + (bc)^2\,(ab)\,(ac)\, a_x + (ca)^2\,(bc)\,(ba)\, b_x = 3l,$$

откуда

$$l = -\tfrac{1}{3}\,(ab)\,(bc)\,(ca)\,[(ab)\, c_x + (bc)\, a_x + (ca)\, b_x].$$

Но трехчленный множитель второй части ур. есть ни что иное, какъ опредѣлитель

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_1x_1 + a_2x_2 \\ b_1 & b_2 & b_1x_1 + b_2x_2 \\ c_1 & c_2 & c_1x_1 + c_2x_2 \end{vmatrix},$$

который тождественно равенъ нулю. Поэтому и линейная коваріанта l, символическое выраженіе которой есть $(c\alpha)^2c_x$, или $(ab)^2\,(ca)\,(cb)\,c_x$, равна нулю.

Тождественное уравненіе

$$(ab)\, c_x + (bc)\, a_x + (ca)\, b_x = 0 \ldots \quad (4)$$

служить главнѣйшимъ средствомъ для преобразованія символическихъ выраженій. Если замѣнить въ немъ x_1 чрезъ d_2, а x_2 чрезъ $-d_1$, то оно приметъ видъ

$$(ab)(cd)+(bc)(ad)+(ca)(bd)=0\ldots\ (5).$$

Изъ ур. (4) и (5) можно вывести множество другихъ тождественныхъ ур., болѣе или менѣе замѣчательныхъ. Чтобы не прерывать впослѣдствіи изысканій о системѣ 2-хъ формъ 2-й и 4-й степеней, я выведу теперь еще одно тождественное ур., которое имѣетъ приложеніе и въ теоріи *одной* формы 4-й степени.

Перемноживъ тождественныя ур.

$$a_x(b\alpha)+b_x(\alpha a)=-\alpha_x(ab)$$
$$a_x(c\alpha)+c_x(\alpha a)=-\alpha_x(ac)$$

(см. ур. 4), имѣемъ

$$a_x^2(b\alpha)(c\alpha)+a_xb_x(c\alpha)(\alpha a)+a_xc_x(b\alpha)(\alpha a)+b_xc_x(\alpha a)^2$$
$$=\alpha_x^2(ab)(ac).$$

Помноживъ это уравненіе на (bc) и написавъ въ 1-мъ членѣ $-b_x(c\alpha)-c_x(\alpha b)$ на мѣсто $\alpha_x(bc)$, имѣемъ

$$a_xb_x(c\alpha)\{(bc)(\alpha a)-(ca)(b\alpha)\}+a_xc_x(b\alpha)\{(bc)(\alpha a)-(ab)(c\alpha)\}$$
$$+b_xc_x(bc)(\alpha a)^2=-\alpha_x^2(ab)(bc)(ca);$$

а такъ какъ по ур. (5)

$$(bc)(a\alpha)+(ca)(b\alpha)+(ab)(c\alpha)=0,$$

то выведенное ур. можетъ быть написано въ слѣдующемъ видѣ:

$$a_xb_x(ab)(c\alpha)^2+b_xc_x(bc)(a\alpha)^2+a_xc_x(ca)(b\alpha)^2=-\alpha_x^2(ab)(bc)(ca)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ (6).$$

Помощью замѣненія однихъ символовъ другими и тождественныхъ преобразованій символическихъ выраженій можно обнаруживать соотношенія между различными инваріантами и коваріантами, не прибѣгая къ приведенію формъ къ частному виду, и не нарушая, слѣдовательно, симметричности результатовъ и самыхъ вычисленій. Поэтому выкладки, основывающіяся на только-что изложенныхъ началахъ, несравненно изящнѣе и нагляднѣе соображеній, которыми пользуются англичане, напр. Сальмонъ.

§ 7. Есть однако такой вопросъ, въ которомъ, при нынѣшнихъ средствахъ теоріи инваріантъ, нельзя избѣгнуть приведенія данной формы или системы формъ къ частному виду: это — изслѣдованіе общаго выраженія какой ни есть инваріанты данной системы формъ въ функціи основныхъ независимыхъ между собой инваріантъ. Конечно, тутъ рѣчь идетъ только о приведеніи данной системы формъ къ такому частному виду, къ которому приводятся вообще всѣ системы формъ данныхъ степеней. Приведеніе данной системы формъ къ данному частному (каноническому) виду помощью линейной подстановки всегда будетъ возможно, если уравненія, получаемыя по исключеніи коэффиціентовъ подстановки изъ уравненій, связывающихъ коэффиціенты преобразованныхъ формъ съ коэффиціентами данныхъ формъ и коэффиціентами подстановки, могутъ быть удовлетворены при всякихъ значеніяхъ коэффиціентовъ данныхъ формъ. Такъ какъ число этихъ уравненій преобразуемости равно числу абсолютныхъ инваріантъ (§§ 1 и 3), и слѣдовательно равно числу s всѣхъ коэффиціентовъ данныхъ формъ безъ 4, то коэффиціенты преобразованныхъ формъ могутъ быть подчинены 4-мъ условіямъ, помощью которыхъ исключатся 4 коэффиціента изъ ур. преобразуемости; можно наприм. просто дать четыремъ коэффиціентамъ численныя значенія. Остальные $s-4$ коэффиціента, которые обозначимъ чрезъ $p, q, \ldots$, опредѣлятся изъ $s-4$ ур. преобразуемости; но эти ур. тогда только могутъ быть удовлетворены приличнымъ выборомъ величинъ коэффиціентовъ $p, q, \ldots$ безъ ограниченія общности данныхъ формъ, когда ни одно изъ нихъ вслѣдствіе упомянутыхъ 4-хъ условій не сдѣлается независимымъ отъ $p, q, \ldots$, и когда между абсолютными инваріантами, составленными изъ коэффиціентовъ преобразованныхъ формъ, нѣтъ алгебрическаго соотноненія; потому-что, въ противномъ случаѣ, одна или нѣсколько абсолютныхъ инваріантъ данныхъ формъ получили бы численныя значенія, или между этими инваріантами получилось бы алгебрическое соотношеніе, между тѣмъ какъ онѣ должны быть совершенно независимыми.

Въ предлагаемыхъ изысканіяхъ мнѣ понадобятся только подстановки извѣстнаго модуля, а именно модуля, равнаго единицѣ. Для подстановокъ модуля единицы условія преобразуемости выразятся въ видѣ равенства соотвѣтственныхъ обыкновенныхъ инваріантъ, составленныхъ изъ коэффиціентовъ данныхъ и преобразованныхъ формъ. Число этихъ условій равно числу инваріантъ, т. е. $s-3$, исключая только случаи одной квадратичной и одной линейной формы. Слѣдовательно, кромѣ условій преобразуемости, коэффиціенты преобразованныхъ формъ могутъ быть подчинены еще 3-мъ условіямъ, напр. можно дать 3-мъ изъ нихъ численныя значенія. Конечно, эти 3 условія должны быть таковы, чтобы ни одна изъ инваріантъ не сдѣлалась независимою отъ остальныхъ $s-3$ коэффиціентовъ p, q, ... преобразованной формы, и чтобы для инваріантъ получились независимыя между собою функціи этихъ $s-3$ коэффиціентовъ. На основаніи этого не трудно рѣшить въ каждомъ частномъ случаѣ, возможно ли приведеніе данной формы или системы формъ къ данному частному виду. Во многихъ случаяхъ возможность нѣкотораго преобразованія очевидна непосредственно. Напримѣръ, квадратичная форма вообще приводится къ виду ρXY помощью подстановки модуля 1; и если мы имѣемъ одну подходящую подстановку, то можемъ замѣнить еще X чрезъ ωX, а Y чрезъ $\frac{Y}{\omega}$, не измѣняя ни вида преобразованной квадратичной формы, ни величины модуля, и воспользоваться произвольною величиною ω для удовлетворенія какому нибудь другому условію, напр. для того, чтобы сдѣлать равными два среднихъ коэффиціента нѣкоторой формы нечетной степени, если таковая находится въ числѣ данныхъ формъ.

II. ИЗСЛѢДОВАНІЕ ПРОСТѢЙШИХЪ СИСТЕМЪ СОВОКУПНЫХЪ БИНАРНЫХЪ ФОРМЪ.

1. Система двухъ квадратичныхъ формъ.

§ 8. Въ случаѣ одной квадратичной формы

$$u = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = a_x^2 = a'^2_x = \ldots$$

по правилу § 6 находимъ инваріанту

$$\tfrac{1}{2}(aa')^2 = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Это — дискриминанта формы u. Если дана еще другая квадратичная форма

$$v = b_{11}x_1^2 + 2b_{12}x_1x_2 + b_{22}x_2^2 = b_x^2 = b'^2_x = \ldots,$$

то, составивъ дискриминанту такъ называемой промежуточной формы $u + kv$, имѣемъ

$$\begin{vmatrix} a_{11} + kb_{11} & a_{12} + kb_{12} \\ a_{21} + kb_{21} & a_{22} + kb_{22} \end{vmatrix} = A + 2Bk + Ck^2,$$

гдѣ $A = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = \frac{1}{2}(aa')^2$, $2B = a_{11}b_{22} + a_{22}b_{11} - 2a_{12}b_{12} = (ab)^2$, $C = b_{11}b_{22} - b_{12}^2 = \frac{1}{2}(bb')^2$.

Можно доказать, что всякая инваріанта данныхъ двухъ формъ u и v есть цѣлая функція этихъ трехъ инваріантъ. Для этого сдѣлаемъ такую подстановку модуля 1, чтобы u обратилось въ $2\beta X_1X_2$. Такъ какъ инваріанты A, B, C очевидно независимы между собою, то условія преобразуемости u и v въ $2\beta X_1 X_2$ и $b_0 X_1^2 + 2b_1 X_1 X_2 + b_2 X_2^2$ будутъ:

$$A = -\beta^2, \quad B = -\beta b_1, \quad C = b_0 b_2 - b_1^2.$$

Изъ этихъ уравненій выводимъ:

$$\beta = \sqrt{-A}, \quad b_1 = -\frac{B}{\sqrt{-A}}, \quad b_0 b_2 = C - \frac{B^2}{A}.$$

Этого вполнѣ достаточно для нашей цѣли: не трудно убѣдиться, что въ выраженіе какой ни есть инваріанты

$$\varphi(a_{11}, a_{12}, a_{22}, b_{11}, b_{12}, b_{22}) = \beta^\nu \psi(b_0, b_1, b_2) \ldots \quad (1)$$

b_0 и b_2 не могутъ входить отдѣльно, а только въ видѣ произведенія $b_0 b_2$. Въ самомъ дѣлѣ, если ν степень φ относительно коэффиціентовъ a_{ik}, а ν' степень φ относительно b_{ik}, то вѣсъ (§§ 2 и 3) каждаго члена φ долженъ равняться $\nu + \nu'$; а такъ какъ вѣсъ множителя β^ν есть ν, то вѣсъ каждаго члена ψ долженъ быть ν'. Поэтому, если въ какой нибудь членъ ψ войдетъ b_0 въ нѣкоторой степени, то въ той же степени должно войти и b_2, т. е. $\psi(b_0, b_1, b_2)$ равно нѣкоторой цѣлой функціи θ отъ b_1 и произведенія $b_0 b_2$. Функція $\theta(b_1, b_0 b_2)$ очевидно не измѣняется отъ перестановки b_0 и b_2. Отсюда слѣдуетъ, что число $\nu + \nu'$, выражающее въ одно время степень и вѣсъ инваріанты φ, не можетъ быть нечетнымъ, такъ какъ инваріанта нечетнаго вѣса (косая) должна была бы мѣнять знакъ при перестановкѣ крайнихъ коэффиціентовъ b_0 и b_2 (§ 2). И такъ *система двухъ квадратичныхъ бинарныхъ формъ не имѣетъ инваріантъ нечетной степени.* Если $\nu + \nu'$ четное, то число множителей равныхъ β и b_1 въ каждомъ членѣ инваріанты должно быть четное, вслѣдствіе чего изчезнетъ радикалъ, входящій въ величины β и b_1, и выраженіе

$$\beta^\nu \psi(b_0, b_1, b_2) = \beta^\nu \theta(b_1, b_0 b_2)$$

обратится въ *раціональную* функцію отъ A, B и C, а именно въ нѣкоторую цѣлую функцію $f(A, B, C)$, помноженную на $A^{\frac{1}{2}(\nu - \nu')}$.

Допустимъ сперва, что $\nu \geqq \nu'$, тогда $\frac{1}{2}(\nu - \nu')$ цѣлое положительное число, которое можетъ быть и нулемъ.

Нельзя усомниться въ справедливости ур.

$$\varphi(a_{ik}, b_{ik},) = A^{\frac{1}{2}(\nu-\nu')} f(A, B, C)\ldots \quad (2)$$

при $A = 0$, хотя и въ этомъ случаѣ преобразованіе u въ $2\beta X_1 X_2$ невозможно: если ур. (2) вѣрно при *всѣхъ* значеніяхъ A, B и C кромѣ $A = 0$, то оно вѣрно и при $A = 0$. Въ самомъ дѣлѣ, положимъ на минуту, что всѣмъ коэффиціентамъ, кромѣ a_{12}, даны совершенно произвольныя постоянныя значенія; тогда на основаніи предъидущаго двѣ цѣлыя функціи отъ a_{12}

$$\varphi(a_{11}, a_{12}, a_{22}, b_{11}, b_{12}, b_{22}) \text{ и } A^{\frac{1}{2}(\nu-\nu')} f(A, B, C)$$

должны быть равны при всѣхъ значеніяхъ a_{12}, кромѣ $a_{12} = \pm\sqrt{a_{11}a_{22}}$. Но въ такомъ случаѣ онѣ должны быть тождественны, и слѣдовательно будутъ равны при *всякомъ* a_{12}, не исключая частной величины $\sqrt{a_{11}a_{22}}$. Поэтому выведенное выраженіе

$$A^{\frac{1}{2}(\nu-\nu')} f(A, B, C)$$

будетъ равно инваріантѣ φ при всѣхъ возможныхъ величинахъ коэффиціентовъ. Въ случаѣ $\nu' > \nu$, можно сдѣлать такую подстановку модуля 1, чтобы v обратилось въ $2\gamma X_1 X_2$: тогда на мѣсто ур. (2) получимъ:

$$\varphi(a_{ik}, b_{ik}) = C^{\frac{1}{2}(\nu'-\nu)} f_1(A, B, C),$$

гдѣ $\frac{1}{2}(\nu' - \nu)$ цѣлое положительное число, а f_1 цѣлая функція. Это уравненіе очевидно справедливо и при $C = 0$, хотя въ этомъ случаѣ v не приводится къ виду $2\gamma X_1 X_2$.

И такъ во всякомъ случаѣ $\varphi(a_{ik}, b_{ik})$ есть цѣлая функція отъ A, B, C; другими словами:

Всякая инваріанта двухъ квадратичныхъ бинарныхъ формъ есть цѣлая раціональная функція трехъ инваріантъ A, B, C.

§ 9. По способу § 6 кромѣ инваріантъ A, B, C получается еще коваріанта $w = (ab) a_x b_x$. Это функціональный опредѣлитель u и v. Между u, v и w существуетъ очевидно алгебрическое соотношеніе, потому-что изъ 3-хъ ур.

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = u,\quad b_{11}x_1^2 + 2b_{12}x_1x_2 + b_{22}x_2^2 = v$$

и

$$w_{11}x_1^2 + 2w_{12}x_1x_2 + w_{22}x_2^2 = w,$$

гдѣ $w_{\varkappa\lambda}$ линейныя функціи коэффиціентовъ каждой изъ данныхъ формъ, можно исключить x_1 и x_2. Это соотношеніе легко получается слѣдующимъ образомъ:

$$w = \begin{vmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \\ b_{11}x_1 + b_{12}x_1 & b_{21}x_1 + b_{22}x_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{22} \\ b_{11} & b_{12} & b_{22} \\ x_2^2 & -x_1x_2 & x_1^2 \end{vmatrix}$$

(гдѣ конечно $a_{21} = a_{12}$, $b_{21} = b_{12}$); слѣдовательно

$$2w^2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{22} \\ b_{11} & b_{12} & b_{22} \\ x_2^2 & -x_1x_2 & x_1^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{22} & -2a_{12} & a_{11} \\ b_{22} & -2b_{12} & b_{11} \\ x_1^2 & 2x_1x_2 & x_1^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2A & 2B & u \\ 2B & 2C & v \\ u & v & 0 \end{vmatrix}$$

или

$$w^2 = -\{Cu^2 - 2Buv + Av^2\} \ldots \quad (3).$$

Дифференцируя это ур., находимъ

$$ww_1 = u_1(Bv - Cu) - v_1(Av - Bu)$$
$$ww_2 = u_2(Bv - Cu) - v_2(Av - Bu),$$

откуда

$$\left.\begin{aligned} w_1u_2 - w_2u_1 &= Av - Bu \\ w_1v_2 - w_2v_1 &= Bv - Cu \end{aligned}\right\} \ldots \quad (4),$$

т. е. если положить $w = c_x^2$, и составить коваріанты $(ca)c_xa_x$ и $(cb)c_xb_x$, то это будутъ линейныя функціи отъ u и v.

Далѣе, по правилу § 6, получаются еще инваріанты

$$A' = \tfrac{1}{2}(ac)^2,\ B' = \tfrac{1}{2}(bc)^2,\ C' = \tfrac{1}{2}(cc')^2.$$

Изъ уравненія

$$c_x^2 = c'^2_x = (ab)\, a_x b_x, \ldots \quad (5),$$

положивъ $x_1 = a'_2$, $x_2 = -a'_1$, находимъ

$$2A' = (ca)^2 = (ab)(aa')(ba').$$

Такъ какъ a и a' имѣютъ одинакія символическія значенія, то можно также написать

$$2A' = (a'b)(a'a)(ba).$$

Взявъ сумму послѣднихъ двухъ уравненій, находимъ:

$$4A' = (ab)(ba')\{(aa') + (a'a)\} = 0.$$

Вообще всякая инваріанта, символическое выраженіе которой мѣняетъ знакъ отъ перестановки двухъ символовъ, имѣющихъ одинакія значенія, равна нулю.

Подобнымъ образомъ докажется, что $B' = \frac{1}{2}(bc)^2 = 0$.

Чтобы опредѣлить C', положимъ въ ур. (5) $x_1 = c'_2$, $x_2 = -c'_1$. Получимъ:

$$(cc')^2 = (ab)(ac')(bc').$$

Но изъ уравненія

$$c'^2_x = (a'b')\, a'_x b'_x$$

слѣдуетъ:

$$2c'_x(c'a) = (a'b')\{a'_x(b'a) + b'_x(a'a)\}$$
$$(c'a)(c'b) = \tfrac{1}{2}(a'b')\{(a'b)(b'a) + (b'b)(a'a)\}.$$

Поэтому

$$(cc')^2 = \tfrac{1}{2}(ab)(a'b')\{(a'a)(b'b) - (a'b)(ab')\}.$$

Но $(ab)(a'b') = (a'a)(b'b) + (a'b)(ab')$ (§ 6, ур. 5), слѣдовательно

$$\tfrac{1}{2}(cc')^2 = \tfrac{1}{4}\{(aa')^2(bb')^2 - (ab')^2(a'b)^2\},$$

т. е.

$$C' = AC - B^2 \ldots \quad (6).$$

Это выраженіе есть въ то же время результанта данныхъ формъ. Въ самомъ дѣлѣ, формы $2\beta X_1X_2$ и $b_0X_1^2+2b_1X_1X_2+b_2X_2^2$ тогда только могутъ имѣть общій множитель, когда одинъ изъ крайнихъ коэффиціентовъ b_0 и b_2, а слѣдовательно и произведеніе $b_0b_2=0$; обратно, при b_0 или $b_2=0$, онѣ имѣютъ общій множитель. Но $b_0b_2=\frac{AC-B^2}{A}$, и обращается въ нуль только при $AC-B^2=0$; слѣдовательно $AC-B^2$ есть результанта формъ u и v. Помощью подобныхъ соображеній можно вывести выраженіе результанты и въ томъ случаѣ, когда форма v не квадратичная.

И такъ, въ частномъ случаѣ, когда данныя квадратичныя формы таковы, что $AC-B^2$ обращается въ нуль, онѣ имѣютъ общій множитель, а ихъ функціональный опредѣлитель w есть полный квадратъ. Въ случаѣ $A=0$, u есть полный квадратъ, а въ случаѣ $C=0$, v. Уравненіе $B=0$ выражаетъ условіе, чтобы пара точекъ $u=0$ находилась въ гармоническомъ соотношеніи съ парою точекъ $v=0$. Подобнымъ образомъ $A'=\frac{1}{2}(ac)^2=0$ есть условіе гармоническаго соотношенія пары $u=0$ съ парою $w=0$, а $B'=\frac{1}{2}(bc)^2=0$ — условіе гармоническаго соотношенія пары $v=0$ съ парою $w=0$. Мы видѣли, что A' и B' тождественно равны нулю. Этимъ доказывается извѣстная теорема, что пара точекъ $w=0$, гдѣ w функціональный опредѣлитель u и v, находится въ гармоническомъ соотношеніи съ каждою изъ паръ точекъ $u=0$ и $v=0$.

Можетъ еще случиться, что коваріанта w тождественно обратится въ нуль. Въ такомъ случаѣ изъ ур.

$$a_{11}b_{12}-a_{12}b_{11}=0,\quad a_{12}b_{22}-a_{22}b_{12}=0,$$

первыя части которыхъ суть коэффиціенты при x_1^2 и x_2^2, выводимъ:

$$\frac{a_{11}}{b_{11}}=\frac{a_{12}}{b_{12}}=\frac{a_{22}}{b_{22}}.$$

Отсюда заключаемъ, что въ случаѣ тождественнаго исчезанія w ур. $u=0$ и $v=0$ выражаютъ одну и ту же пару точекъ.

2. Система трехъ квадратичныхъ формъ.

§ 10. Пусть будутъ $u = a_x^2 = a'^2_x = \ldots$, $v = b_x^2 = b'^2_x \ldots$, $w = c_x^2 = c'^2_x = \ldots$ какія угодно три квадратичныя формы. По способу § 6 получимъ 3 коваріанты

$$p = p_x^2 = (bc) b_x c_x, \; q = q_x^2 = (ca) c_x a_x, \; r = r_x^2 = (ab) a_x b_x \ldots \quad (1)$$

и 6 инваріантъ:

$$A = \tfrac{1}{2}(aa')^2, \quad B = \tfrac{1}{2}(bb')^2, \quad C = \tfrac{1}{2}(cc')^2,$$
$$D = \tfrac{1}{2}(bc)^2, \quad E = \tfrac{1}{2}(ca)^2, \quad F = \tfrac{1}{2}(ab)^2.$$

Далѣе, соединяя коваріанты съ самыми формами, получаемъ еще инваріанты

$$(pa)^2, \qquad (qb)^2, \qquad (rc)^2, \ldots \quad (2).$$

Остальныя инваріанты подобнаго вида, напр. $(pb)^2$, $(pc)^2, \ldots$ обращаются въ нуль, какъ показано въ предъидущемъ §.

Первое изъ ур. (1) даетъ при $x_1 = a_2$, $x_2 = -a_1$:

$$(pa)^2 = (bc)(ba)(ca).$$

Подобнымъ образомъ находимъ:

$$(qb)^2 = (ca)(cb)(ab), \; (rc)^2 = (ab)(ac)(bc).$$

Слѣдовательно всѣ 3 выраженія (2) изображаютъ одну и ту же инваріанту. Написавъ на мѣсто (ab) $a_1 b_2 - a_2 b_1$, и т. д., находимъ

$$(ab)(ac)(bc) = a_2^2 b_2^2 c_2^2 \left(\frac{a_1}{a_2} - \frac{b_1}{b_2}\right)\left(\frac{a_1}{a_2} - \frac{c_1}{c_2}\right)\left(\frac{b_1}{b_2} - \frac{c_1}{c_2}\right)$$

$$= -a_2^2 b_2^2 c_2^2 \begin{vmatrix} 1 & \frac{a_1}{a_2} & \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2 \\ 1 & \frac{b_1}{b_2} & \left(\frac{b_1}{b_2}\right)^2 \\ 1 & \frac{c_1}{c_2} & \left(\frac{c_1}{c_2}\right)^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1^2 & a_1 a_2 & a_2^2 \\ b_1^2 & b_1 b_2 & b_2^2 \\ c_1^2 & c_1 c_2 & c_2^2 \end{vmatrix}.$$

Отъ подстановки коэффиціентовъ u, v, w на мѣсто символическихъ произведеній, этотъ опредѣлитель обращается въ слѣдующій:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{22} \\ b_{11} & b_{12} & b_{22} \\ c_{11} & c_{12} & c_{22} \end{vmatrix}.$$

Обозначивъ этотъ опредѣлитель чрезъ $2K$, имѣемъ седьмую инваріанту K, символическое выраженіе которой

$$\tfrac{1}{2}(ab)(ac)(bc), \text{ или } \tfrac{1}{2}(pa)^2, \text{ или } \tfrac{1}{2}(qb)^2, \text{ или } \tfrac{1}{2}(rc)^2.$$

Но число коэффиціентовъ формъ u, v и w есть 9, слѣдовательно система этихъ формъ имѣетъ только 6 инваріантъ, независимыхъ между собою (§ 3). Не трудно убѣдиться въ независимости между собою первыхъ 6-ти инваріантъ; а слѣдовательно всякая дальнѣйшая инваріанта, въ томъ числѣ и K, должна быть алгебрическая функція первыхъ 6-ти. Очевидно однако, что инваріанта K не можетъ выразиться раціонально помощью первыхъ 6-ти инваріантъ, такъ какъ она косая, а всѣ прочія 6 — прямыя. Но квадратъ ея будетъ прямая инваріанта, и выраженіе его въ цѣлой функціи 6-ти инваріантъ 2-й степени легко получается слѣдующимъ образомъ:

$$8K^2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{22} \\ b_{11} & b_{12} & b_{22} \\ c_{11} & c_{12} & c_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{22} & -2a_{12} & a_{11} \\ b_{22} & -2b_{12} & b_{11} \\ c_{22} & -2c_{12} & c_{11} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2A & 2F & 2E \\ 2F & 2B & 2D \\ 2E & 2D & 2C \end{vmatrix},$$

откуда:

$$K^2 = \begin{vmatrix} A & F & E \\ F & B & D \\ E & D & C \end{vmatrix} \; \ldots\ldots\ldots \quad (2).$$

Изъ уравненій: $u = a_{11}x_1^2 + \ldots$, $v = b_{11}x_1^2 + \ldots$, $w = c_{11}x_1^2 + \ldots$ можно исключить x_1 и x_2, и получить тождественное уравненіе между u, v и w. Это уравненіе 2-й степени относительно сихъ послѣднихъ величинъ и можетъ быть выведено слѣдующимъ образомъ:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{22} & 0 \\ b_{11} & b_{12} & b_{22} & 0 \\ c_{11} & c_{12} & c_{22} & 0 \\ x_2^2 & -x_1x_2 & x_1^2 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{22} & -2a_{12} & a_{11} & 0 \\ b_{22} & -2b_{12} & b_{11} & 0 \\ c_{22} & -2c_{12} & c_{11} & 0 \\ x_1^2 & 2x_1x_2 & x_2^2 & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

а перемноживъ эти два опредѣлителя, имѣемъ:

$$\begin{vmatrix} A & F & E & u \\ F & B & D & v \\ E & D & C & w \\ u & v & w & 0 \end{vmatrix} = 0, \ldots \quad (3),$$

или

$$Lu^2 + Mv^2 + Nw^2 + 2Pvw + 2Quw + 2Ruv = 0, \ldots \quad (4).$$

гдѣ L, M,... частные опредѣлители 2-го порядка, составленные изъ элементовъ опредѣлителя (2).

Въ частномъ случаѣ, когда w функціональный опредѣлитель формъ u и v, $D = E = 0$ (§ 9), а уравненіе (4) обращается въ уравненіе (3), § 9.

Функціональные опредѣлители формъ u, v, w, помноженные на K, выражаются линейно чрезъ самыя формы. Чтобы получить эти выраженія, стоитъ только перемножить опредѣлители

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{22} & 0 \\ b_{11} & b_{12} & b_{22} & 0 \\ c_{11} & c_{12} & c_{22} & 0 \\ x_2^2 & -x_1x_2 & x_1^2 & 1 \end{vmatrix} \text{ и } \begin{vmatrix} a_{22} & -2a_{12} & a_{11} & \lambda \\ b_{22} & -2b_{12} & b_{11} & \mu \\ c_{22} & -2c_{12} & c_{11} & \nu \\ x_1^2 & 2x_1x_2 & x_2^2 & 0 \end{vmatrix} \ldots \quad (5).$$

Получимъ:

$$\begin{vmatrix} 2A & 2F & 2E & u \\ 2F & 2B & 2D & v \\ 2E & 2D & 2C & w \\ u+\lambda & v+\mu & w+\nu & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2A & 2F & 2E & u \\ 2F & 2B & 2D & w \\ 2E & 2D & 2C & v \\ \lambda & \mu & \nu & 0 \end{vmatrix} \text{(см. ур. (3)}$$

$$= -2\{\lambda\Phi'(u) + \mu\Phi'(v) + \nu\Phi'(w)\}, \ldots \quad (6),$$

гдѣ Φ означаетъ первую часть ур. (4). Но первый изъ опредѣлителей (5) есть $2K$, а второй равенъ

$$-2\begin{vmatrix} \lambda & u_1 & u_2 \\ \mu & v_1 & v_2 \\ \nu & w_1 & w_2 \end{vmatrix} \ldots \quad (7).$$

Сравнивая коэффиціенты при λ, μ, ν въ выраженіяхъ (6) и (7), находимъ:

$$\left.\begin{aligned} K(v_1w_2 - v_2w_1) &= \tfrac{1}{2}\Phi'(u) = Lu + Rv + Qw \\ K(w_1u_2 - w_2u_1) &= \tfrac{1}{2}\Phi'(v) = Ru + Mv + Pw \\ K(u_1v_2 - u_2v_1) &= \tfrac{1}{2}\Phi'(w) = Qu + Pv + Nw \end{aligned}\right\} \ldots \quad (8).$$

Замѣчаніе. Преобразованіе 2-го изъ опредѣлителей (5) въ выраженіе (7) можетъ быть произведено слѣдующимъ образомъ:

$$\begin{vmatrix} a_{22} & -2a_{12} & a_{11} & \lambda \\ b_{22} & -2b_{12} & b_{11} & \mu \\ c_{22} & -2c_{12} & c_{11} & \nu \\ x_1^2 & 2x_1x_2 & x_2^2 & 0 \end{vmatrix} = 2x_1x_2 \begin{vmatrix} a_{22} & -a_{12} & a_{11} & \lambda \\ b_{22} & -b_{12} & b_{11} & \mu \\ c_{22} & -c_{12} & c_{11} & \nu \\ \frac{x_1}{x_2} & 1 & \frac{x_2}{x_1} & 0 \end{vmatrix} = -2x_1x_2 \begin{vmatrix} 1 & \frac{x_2}{x_1} & \frac{x_1}{x_2} & 0 \\ -a_{12} & a_{11} & a_{22} & \lambda \\ -b_{12} & b_{11} & b_{22} & \mu \\ -c_{12} & c_{11} & c_{22} & \nu \end{vmatrix}$$

$$= -2\begin{vmatrix} 1 & x_2 & x_1 & 0 \\ -a_{12} & a_{11}x_1 & a_{22}x_2 & \lambda \\ -b_{12} & b_{11}x_1 & b_{22}x_2 & \mu \\ -c_{12} & c_{11}x_1 & c_{22}x_2 & \nu \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -a_{12} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 & a_{12}x_1 + a_{22}x_2 & \lambda \\ -b_{12} & b_{11}x_1 + b_{12}x_2 & b_{12}x_1 + b_{22}x_2 & \mu \\ -c_{12} & c_{11}x_1 + c_{12}x_2 & c_{12}x_1 + c_{22}x_2 & \nu \end{vmatrix}$$

$$= -2\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & \lambda \\ v_1 & v_2 & \mu \\ w_1 & w_2 & \nu \end{vmatrix}.$$

§ 11. Можно доказать, что, кромѣ 7-ми найденныхъ инваріантъ

$$A,\ B,\ C,\ D,\ E,\ F \text{ и } K,$$

система 3-хъ квадратичныхъ формъ никакихъ другихъ инваріантъ имѣть не можетъ, т. е. что всѣ прочія инваріанты этой системы формъ суть цѣлыя раціональныя функціи этихъ 7-ми инваріантъ.

Преобразовавъ u въ $2\beta X_1X_2$ помощью подстановки модуля 1, и принявъ обозначенія

$$v = b_0X_1^2 + 2b_1X_1X_2 + b_2X_2^2, \quad w = c_0X_1^2 + 2c_1X_1X_2 + c_2X_2^2,$$

имѣемъ:

$$\left.\begin{aligned} A &= -\beta^2,\ B = b_0b_2 - b_1^2,\ C = c_0c_2 - c_1^2 \\ 2D &= b_0c_2 + c_0b_2 - 2b_1c_1,\ E = -\beta c_1,\ F = -\beta b_1, \end{aligned}\right\}\ldots \quad (1).$$

откуда:

$$\beta = \sqrt{-A},\ b_1 = -\frac{F}{\sqrt{-A}},\ c_1 = -\frac{E}{\sqrt{-A}},\ b_0b_2 = B - \frac{F^2}{A},$$

$$c_0c_2 = C - \frac{E^2}{A},\ \tfrac{1}{2}(b_0c_2 + c_0b_2) = \frac{AD - EF}{A}\ldots \quad (2)$$

$$b_0c_2 \,.\, c_0b_2 = \frac{1}{A^2}\{A^2BC - ACF^2 - ABE^2 + E^2F^2\}.$$

Изъ послѣднихъ двухъ уравненій слѣдуетъ:

$$\tfrac{1}{2}(b_0c_2 - c_0b_2)^2 = -\frac{1}{A}\{ABC - AD^2 - BE^2 - CF^2 + 2DEF\}\ldots (3);$$

а изъ уравненій (2) и (3) выводимъ:

$$\left.\begin{aligned} b_0c_2 &= \frac{1}{A}\{AD - EF - \sqrt{-A}\sqrt{ABC - AD^2 - BE^2 - CF^2 + 2DEF}\} \\ b_2c_0 &= \frac{1}{A}\{AD - EF + \sqrt{-A}\sqrt{ABC - AD^2 - BE^2 - CF^2 + 2DEF}\} \end{aligned}\right\}\ldots (4).$$

Изъ уравненій (1) нельзя опредѣлить величинъ отдѣльныхъ коэффиціентовъ b_0, b_2, c_0, c_2; но для опредѣленія общаго вида инваріанты разсматриваемой системы формъ достаточно имѣть величины 4-хъ произведеній

$$b_0b_2,\ c_0c_2,\ b_0c_2,\ b_2c_0\ldots \quad (\alpha).$$

Можно доказать, что ни одинъ изъ коэффиціентовъ со значками 0 и 2 не можетъ входить иначе въ инваріанту формъ u, v, w, какъ въ сочетаніяхъ (α).

Всякая инваріанта $\varphi(a_{ik}, b_{ik}, c_{ik})$ отъ подстановки коэффиціентовъ преобразованныхъ формъ приметъ видъ

$$\beta^{\nu}.\psi(b_0, b_1, b_2, c_0, c_1, c_2),$$

гдѣ ν степень инваріанты относительно коэффиціентовъ u. Если эта инваріанта степени ν' относительно коэффиціентовъ v, и степени ν'' относительно коэффиціентовъ w, то вѣсъ ея будетъ $\nu+\nu'+\nu''$, а слѣдовательно сумма значковъ во всѣхъ членахъ множителя ψ должна быть $\nu'+\nu''$. А для этого, каждый разъ, когда въ одинъ изъ членовъ ψ войдетъ b_0 или c_0, должно также войти или b_2, или c_2. Поэтому b_0, c_0, b_2, c_2 не иначе могутъ входить въ выраженіе ψ, какъ въ видѣ произведеній (α), т. е.

$$\varphi(a_{ik}, b_{ik}, c_{ik}) = \beta^{\nu}.\theta(b_1, c_1, b_0 b_2, c_0 c_2, b_0 c_2, b_2 c_0),$$

гдѣ θ цѣлая функція.

Вѣсъ инваріанты φ равенъ $\nu+\nu'+\nu''$. Разсмотримъ отдѣльно оба случая: когда вѣсъ четный, и когда онъ нечетный.

1) Когда $\nu+\nu'+\nu''$ число *четное*, то число среднихъ коэффиціентовъ β, b_1, c_1, входящихъ въ каждый членъ инваріанты, должно быть *четное*, и слѣдовательно ирраціональности, происходящія отъ этихъ коэффиціентовъ, взаимно уничтожается, и выраженіе φ приведется къ виду:

$$P+Q\sqrt{-A}\sqrt{M}, \ldots \quad (5),$$

гдѣ P и Q раціональныя функціи 6-ти инваріантъ 2-го порядка, а M извѣстный полиномъ. Въ знаменателѣ P и Q могутъ имѣть только нѣкоторую степень A. Но при $\nu+\nu'+\nu''$ *четномъ*, инваріанта φ прямая, и слѣдовательно не измѣняется отъ перестановки b_0 съ b_2, и c_0 съ c_2. Отъ этой перестановки не измѣняются произведенія $b_0 b_2$ и $c_0 c_2$, а произведенія $b_0 c_2$ и $b_2 c_0$ переходятъ одно въ другое; и такъ какъ выраженія (4) отличаются между собою только знакомъ радикала $\sqrt{M}$, то выраженіе (5) не должно измѣняться отъ перемѣны знака $\sqrt{M}$, т. е. должно быть

$$P+Q\sqrt{-A}\sqrt{M} = P-Q\sqrt{-A}\sqrt{M},$$

откуда $Q = 0$. Поэтому $\varphi(a_{ik}, b_{ik}, c_{ik}) = P$. Это уравненіе справедливо и при $A = 0$, хотя въ этомъ случаѣ u не преобразовывается въ $2\beta X_1 X_2$ (ср. § 8). Отсюда слѣдуетъ, что P должно быть цѣлою функціею 6-ти инваріантъ, потому-что несократимая дробь вида $\frac{f(A, B, C, D, E, F)}{A^\rho}$, гдѣ f цѣлая функція, а ρ цѣлое положительное число, не можетъ равняться инваріантѣ $\varphi(a_{ik}, b_{ik}, c_{ik})$, цѣлой функціи коэффиціентовъ данныхъ формъ. Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ при $A = 0$ прочія 5 инваріантъ могутъ имѣть какія угодно значенія, то упомянутая дробь будетъ обращаться въ безконечность каждый разъ когда $a_{12}^2 = a_{11}a_{22}$, между тѣмъ какъ φ остается конечнымъ при всѣхъ конечныхъ величинахъ коэффиціентовъ. И такъ, мы имѣемъ слѣдующую теорему:

Всякая прямая инваріанта трехъ квадратичныхъ бинарныхъ формъ есть цѣлая функція 6-ти инваріантъ A, B, C, D, E и F.

2) Когда $\nu + \nu' + \nu''$ *нечетное*, то число среднихъ коэффиціентовъ, входящихъ въ каждый членъ разсматриваемой инваріанты, должно быть нечетное, и слѣдовательно выраженіе инваріанты приметъ видъ:

$$\sqrt{-A}\{R + S\sqrt{-A}\sqrt{M}\} = \sqrt{-A}\,.\,R + T\,.\sqrt{M},$$

гдѣ R, S и T раціональныя функціи 6-ти инваріантъ, имѣющія въ знаменателѣ только нѣкоторую степень A (которая можетъ быть и нулевою). Въ настоящемъ случаѣ разсматриваемая инваріанта *косая*, слѣдовательно должна мѣнять знакъ отъ перестановки крайнихъ коэффиціентовъ каждой изъ формъ v и w, или, что одно и то же, отъ перемѣны знака $\sqrt{M}$. Поэтому должно быть

$$R\sqrt{-A} + T\sqrt{M} = -(R\sqrt{-A} - T\sqrt{M}),$$

откуда $R = 0$. Поэтому выраженіе всякой косой инваріанты будетъ имѣть видъ

$$T\sqrt{M},$$

гдѣ T равно цѣлой функціи отъ A, B, C, D, E, F, дѣленной на нѣкоторую степень A. Но такъ какъ $\sqrt{M}$ не обращается въ нуль при $A=0$, то не трудно убѣдиться, на основаніи соображеній, подобныхъ предъидущимъ, что раціональная функція T должна быть *цѣлою* функціею всѣхъ 6-ти инваріантъ A, B, C, D, E, F.

Замѣтивъ еще, что

$$K=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & \beta & 0 \\ b_0 & b_1 & b_2 \\ c_0 & c_1 & c_2 \end{vmatrix}=\frac{1}{2}\beta(b_2c_0-b_0c_2)=\pm\sqrt{M},$$

мы можемъ высказать слѣдующую теорему:

Всякая косая инваріанта 3-хъ квадратичныхъ бинарныхъ формъ равна нѣкоторой прямой инваріантѣ, помноженной на косую инваріанту

$$K=\sqrt{\{ABC-AD^2-BE^2-CF^2+2DEF\}}.$$

§ 12. Частные случаи изчезанія одной изъ инваріантъ 2-го порядка не представляютъ ничего новаго. Остается разобрать случай $K=0$. Въ этомъ случаѣ ур. (8) § 10 даютъ:

$$Lu+Rv+Qw=0,\ Ru+Mv+Pw=0,\ Qu+Pv+Nw=0\ldots\quad(6).$$

Всѣ эти 3 ур. выражаютъ одно и то же линейное соотношеніе между u, v, w, потому-что въ случаѣ $K=0$ опредѣлитель

$$\begin{vmatrix} A & F & E \\ F & B & D \\ E & D & C \end{vmatrix}=K^2=0,$$

и слѣдовательно между частными опредѣлителями 2-го порядка существуетъ слѣдующая зависимость:

$$L:R:Q=R:M:P=Q:P:N.$$

Обратно, если между формами u, v и w существуетъ линейное соотношеніе, то опредѣлитель K равенъ нулю. И такъ *ур. $K=0$ есть условіе, необходимое и достаточное для того, чтобы между данными 3-мя формами существовало линейное соотношеніе.*

Вслѣдствіе подобнаго соотношенія между u, v и w, коваріанты

p, q и r будутъ отличаться одна отъ другой только постояннымъ множителемъ, а слѣдовательно всѣ 3 уравненія

$$p = 0, \qquad q = 0, \qquad r = 0 \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

будутъ выражать одну и ту же пару точекъ, которая, по свойству функціональнаго опредѣлителя двухъ квадратичныхъ бинарныхъ формъ, будетъ находиться въ гармоническомъ соотношеніи съ каждою изъ паръ точекъ: $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$, другими словами, эти 3 пары точекъ составятъ *инволюцію*, *фокусы* которой выражаются каждымъ изъ ур. (7).

Впрочемъ, вспомнивъ, что инваріанты $(pb)^2$ и $(pc)^2$ тождественно равны нулю, а $(pa)^2 = 2K$, мы можемъ заключить непосредственно, что въ случаѣ $K = 0$ пара точекъ $p = 0$ находится въ гармоническомъ соотношеніи съ каждою изъ паръ $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$, и слѣдовательно эти 3 послѣднія пары находятся въ инволюціи. Предыдущія соображенія имѣютъ однако то преимущество, что обнаруживаютъ въ то же время тождество между собою ур. (7).

3. Система двухъ формъ 2-й и 3-й степеней.

§ 13. Если даны формы $u = ax_1^3 + 3bx_1^2x_2 + 3cx_1x_2^2 + dx_2^3 = a_x^3 = a'^3_x = \ldots$ и $v = \alpha x_1^2 + 2\beta x_1x_2 + \gamma x_2^2 = \alpha_x^2 = \alpha'^2_x = \ldots$, то, составивъ квадратичную коваріанту (Гессіанъ) формы u, $h = (aa')^2 a_x a'_x = b_x^2 = b'^2_x = \ldots$, мы можемъ приложить сказанное въ §§ 8 и 9 къ формамъ v и h, и получимъ такимъ образомъ три инваріанты, символическія выраженія которыхъ будутъ:

$$A = \tfrac{1}{2}(\alpha\alpha')^2,\ B = \tfrac{1}{2}(\alpha b)^2,\ C = \tfrac{1}{2}(bb')^2 \ldots \quad (1)$$

и коваріанту $w = (\alpha b)\alpha_x b_x$, связанную съ v и h уравненіемъ

$$w^2 = -\{Ah^2 - 2Bhv + Cv^2\} \ldots\ldots\ldots \quad (2).$$

А по способу § 6 непосредственно получаемъ коваріанты

$$(a\alpha)\, a_x^{\,2}\alpha_x, \quad (a\alpha)^2 a_x,$$

изъ которыхъ первая — функціональный опредѣлитель u и v, а вторая замѣчательна тѣмъ, что она *линейная*. Означивъ ее чрезъ $l = l_1x_1 + l_2x_2$, а чрезъ φ какую-нибудь коваріанту, мы получимъ результанту ур. $\varphi = 0$ и $l = 0$, принявъ въ φ $x_1 = l_2$, а $x_2 = -l_1$; эта результанта, какъ инваріанта коваріантъ φ и l, будетъ также инваріанта данныхъ формъ u и v (§ 6). Взявъ на мѣсто φ поочереди v, u и w, получаемъ инваріанты:

$$\left.\begin{aligned} &\alpha l_2^{\,2} - 2\beta l_1 l_2 + \gamma l_1^{\,2} = 2E \\ &a l_2^{\,3} - 3b l_2^{\,2} l_1 + 3c l_1^{\,2} l_2 - d l_1^{\,3} = 2F \end{aligned}\right\} \ldots \quad (3),$$

$$w_{11} l_2^{\,2} - 2w_{12} l_1 l_2 + w_{22} l_1^{\,2} = 2K \ldots\ldots\ldots \quad (4).$$

Если мы изобразимъ E чрезъ $\frac{1}{2}(\alpha l)^2$, то въ этомъ выраженіи только α будетъ имѣть символическое значеніе, а величины $l_1^{\,2}$, $l_1 l_2$ и $l_2^{\,2}$ должны быть разсматриваемы какъ настоящія степени и произведенія. Чисто-символическое выраженіе E будетъ $\frac{1}{2}(\alpha l)(\alpha l')$, такъ какъ символы l, l', ... могутъ входить только линейно, потому-что относятся къ линейной функціи x. Чтобы получить окончательное выраженіе E, стоитъ только въ выраженіяхъ $l = (a\alpha)^2 a_x$ и $l' = (a'\alpha')^2 a'_x$ положить $x_1 = \alpha''_2$, $x_2 = -\alpha''_1$; получится $(l\alpha'') = (a\alpha)^2(a\alpha'')$, $(l'\alpha'') = (a'\alpha')^2(a'\alpha'')$, и слѣдовательно $E = \frac{1}{2}(\alpha'' l)(\alpha'' l') = \frac{1}{2}(a\alpha)^2(a'\alpha')^2(a'\alpha'')(a\alpha'')$.

Подобнымъ образомъ находимъ:

$$2F = (a'''l)(a'''l')(a'''l'') = (a\alpha)^2(a'\alpha')^2(a''\alpha'')^2(a'''a)(a'''a')(a'''a'').$$

Можно также написать:

$$2F = (al)(al')(al'') = (al)(al')(aa')(a'\alpha)^2$$

$$= -(al)(aa')(a'\alpha)\{(l'a')(a\alpha) + (a'a)(l'\alpha)\} \quad \text{(ур. 5, § 6)}.$$

Выраженіе $(aa')(al)(a'l')(a\alpha)(a'\alpha)$ при переходѣ къ истиннымъ коэффиціентамъ u и v дастъ нуль, потому-что мѣняетъ знакъ отъ перемѣщенія a съ a' и l съ l', между тѣмъ какъ эти символы имѣютъ попарно одинакія значенія. Поэтому

$$2F = (aa')^2(a'\alpha)(al)(l'\alpha).$$

Наконецъ

$$2K = (wl)(wl') = \tfrac{1}{2}(\alpha b)\{(\alpha l')(bl) + (bl')(\alpha l)\},$$

или просто

$$2K = (\alpha b)(bl)(\alpha l') = -(\alpha l')(aa')^2(al)(a'\alpha) = 2F.$$

И такъ, F и K — одна и та же инваріанта.

Всего у насъ теперь 5 инваріантъ: A, B, C, E и K или F. Но такъ какъ число коэффиціентовъ u и v равно 7, то число инваріантъ, независимыхъ между собою, не можетъ быть болѣе 4. Поэтому между пятью инваріантами A, B, C, E и K должна существовать зависимость. Такъ какъ первыя 4 прямыя, а пятая K косая, то весьма естественно попытаться выразить K^2 чрезъ A, B, C и E. Для этого можетъ послужить ур. (2), которое при $x_1 = l_2$, $x_2 = -l_1$ даетъ

$$K^2 = -\{AG^2 - 2BEG + CE^2\}, \ldots \quad (5),$$

гдѣ положено

$$h_{11}l_2^2 - 2h_{12}l_2l_1 + h_{22}l_1^2 = 2G \ldots\ldots \quad (6).$$

Остается выразить G чрезъ A, B, C и E. Такъ какъ

$$G = \tfrac{1}{2}(bl)(bl') = \tfrac{1}{2}(ba)(ba')(a\alpha)^2(a'\alpha')^2,$$

то займемся сперва коваріантою $t = (ba)(ba')(a\alpha)^2 a'^2_x = \tau_x^2$. Вмѣсто этого выраженія можно написать

$$\begin{aligned} t &= \tfrac{1}{2}(ba)(ba')\{(a\alpha)^2 a'^2_x + (a'\alpha)^2 a_x^2\} \\ &= \tfrac{1}{2}(ba)(ba')\{2(a\alpha)(a'\alpha)a_xa'_x + (aa')^2\alpha_x^2\} \quad \text{(ур. 4, § 6)} \\ &= \tfrac{1}{2}a_xa'_x\{(ba)^2(a'\alpha)^2 + (a'b)^2(a\alpha)^2 - (aa')^2(b\alpha)^2\} + \tfrac{1}{2}(bb')^2\alpha_x^2 \end{aligned}$$

(ур. 5, § 6).

Но изъ теоріи одной кубической бинарной формы извѣстно, что линейная коваріанта $(ba)^2 a_x = (ba')^2 a'_x = 0$ [1]), слѣдовательно

$$t = -Bh + Cv,$$

а поэтому

$$G = \tfrac{1}{2}(\tau\alpha')^2 = AC - B^2 \ldots \quad (7).$$

Подставивъ эту величину въ ур. (5), имѣемъ:

$$K^2 = -A(AC - B^2)^2 + 2BE(AC - B^2) - CE^2 \ldots \quad (8).$$

Можно доказать, что всѣ дальнѣйшія инваріанты системы формъ u и v суть ничто иное, какъ цѣлыя раціональныя функціи отъ A, B, C, E и K. Для этого преобразуемъ u и v такимъ образомъ, какъ указано въ концѣ § 7. Пусть преобразованныя формы будутъ:

$$2\delta X_1 X_2 \text{ и } \lambda X_1^3 + 3\sqrt{\varkappa} X_1^2 X_2 + 3\sqrt{\varkappa} X_1 X_2^2 + \lambda' X_2^3.$$

Составивъ выраженія инваріантъ A, B, C и E въ функціи коэффиціентовъ этихъ формъ, имѣемъ

$$\left.\begin{array}{l} A = -\delta^2, \; B = \delta(\varkappa - \lambda\lambda'), \; E = -4\delta^3\varkappa \\ C = -\lambda^2\lambda'^2 - 4\sqrt{\varkappa^3}(\lambda + \lambda') + 3\varkappa^2 + 6\varkappa\lambda\lambda', \end{array}\right\} \quad (9).$$

Эти 4 ур. рѣшаются относительно δ, $\varkappa$, λ и λ', откуда можно заключить, что A, B, C и E суть независимыя между собою функціи этихъ коэффиціентовъ. Всякая инваріанта, будучи цѣлою функціею сихъ послѣднихъ, выразится поэтому и чрезъ A, B, C и E. Рѣшая ур. (9), находимъ:

$$\delta = \sqrt{-A}, \; \varkappa = -\frac{E}{4\sqrt{-A^3}}, \; \lambda\lambda' = \frac{4AB - E}{4\sqrt{-A^3}}$$

$$\lambda + \lambda' = \frac{2A^3C - 2A^2B^2 - 2ABE + E^2}{\sqrt[4]{-A^3}\,\sqrt{-E^3}}$$

$$(\lambda - \lambda')^2 = \frac{4A^3}{E^3\sqrt{-A^3}}\{-A^3C^2 - AB^4 + 2A^2B^2C + 2ABCE - 2B^3E - CE^2\},$$

---

[1]) См. § 6, стран. 36 и 37.

и наконецъ

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt[4]{-A^3}\,\sqrt{-E^3}}\left\{L \pm \sqrt{-A^3}\,\sqrt{M}\right\}$$

$$\lambda' = \frac{1}{\sqrt[4]{-A^3}\,\sqrt{-E^3}}\left\{L \mp \sqrt{-A^3}\,\sqrt{M}\right\},$$

гдѣ L обозначаетъ числитель выраженія $\lambda + \lambda'$, дѣленный на 2, а M многочленный множитель предыдущаго выраженія. Подставивъ найденныя величины δ, $\varkappa$, λ и λ' въ выраженіе какой-нибудь инваріанты формъ u и v

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma, a, b, c, d) = \delta^m f(\lambda, \sqrt{\varkappa}, \sqrt{\varkappa}, \lambda'),$$

гдѣ m степень φ относительно α, β, γ, а f цѣлая однородная функція, получимъ:

$$\varphi = (-A)^{\frac{m}{2}} f\left(\frac{L \pm \sqrt{-A^3 M}}{E\sqrt[4]{-A^3}\sqrt{-E}}, \frac{-E}{2\sqrt[4]{-A^3}\sqrt{-E}}, \frac{-E}{2\sqrt[4]{-A^3}\sqrt{-E}}, \frac{L \mp \sqrt{-A^3 M}}{E\sqrt[4]{-A^3}\sqrt{-E}}\right).$$

Это выраженіе очевидно приведется къ виду

$$\varphi = (-A)^{\frac{m}{2} - \frac{3n}{4}} (-E)^{-\frac{n}{2}} E^{-\mu} \{P + Q\sqrt{-A^3 M}\},$$

гдѣ P и Q цѣлыя функціи 4-хъ инваріантъ A, B, C и E, μ цѣлое положительное число, а n степень φ относительно коэффиціентовъ u.

Не трудно замѣтить, что число n всегда четное. Въ самомъ дѣлѣ, если $\varphi' = r^\nu \varphi$, гдѣ φ' означаетъ инваріанту φ, составленную изъ коэффиціентовъ, происшедшихъ отъ совершенно произвольнаго преобразованія формъ u и v, то цѣлое число $\nu = \frac{1}{2}(3n + 2m)$ (§ 3). Эта же формула можетъ давать цѣлыя числа только при *четномъ* n. Принявъ $n = 2p$, и положивъ $\mu + p = q$, получимъ:

$$\varphi = (-A)^{\frac{1}{2}(m-3p)} (-E)^{-q} \{P + Q\sqrt{-A^3 M}\}.$$

Нужно теперь различить два случая: когда ν четное, и когда ν нечетное. Въ первомъ случаѣ инваріанта φ *прямая*, и слѣдовательно не измѣнится отъ перестановки λ и λ' (§ 2). Но такъ какъ величины λ и λ' отличаются только знаками при $\sqrt{-A^3M}$, то эта перестановка приводится къ перемѣнѣ знака этого радикала. И такъ, при *четномъ* ν должно быть:

$$P+Q\sqrt{-A^3M}=P-Q\sqrt{-A^3M},$$

откуда $Q=0$.

При нечетномъ же ν, инваріанта φ будетъ *косая*, и слѣдовательно перемѣнитъ знакъ отъ перемѣщенія λ и λ', т. е. отъ перемѣны знака $\sqrt{-A^3M}$. Поэтому при *нечетномъ* ν должно быть:

$$P+\sqrt{-A^3M}=-(P-Q\sqrt{-A^3M}),$$

откуда $P=0$.

И такъ общій видъ *прямой* инваріанты будетъ:

$$(-A)^{\frac{1}{2}(m-3p)}(-E)^{-q}.P,$$

гдѣ P цѣлая функція A, B, C, E; а общій видъ *косой* инваріанты:

$$(-A)^{\frac{1}{2}(m-3p+3)}(-E)^{-q}\,Q\sqrt{M},$$

гдѣ Q цѣлая функція A, B, C, E, а M извѣстный полиномъ. Въ обоихъ этихъ выраженіяхъ степень $-A$ будетъ *цѣлая*. При ν четномъ $=2\rho=3p+m$, $m-3p=2(\rho-3p)$, и слѣдовательно $\frac{1}{2}(m-3p)$ число цѣлое; а при ν нечетномъ $=2\rho'+1=3p+m$, $m-3p+3=2(\rho'-3p+2)$, и слѣдовательно $\frac{1}{2}(m-3p+3)$ опять число цѣлое. И такъ, если φ прямая инваріанта, то она приведется къ виду

$$\varphi=\frac{P}{A^sE^q}, \ldots\ldots \quad (10),$$

а если она косая — къ виду

$$\varphi=\frac{Q}{A^tE^q}\sqrt{M}, \ldots \quad (11).$$

гдѣ s, t и q обозначаютъ цѣлыя положительныя числа, которыя могутъ быть и нулями.

Уравненіе (10) выведено въ предположеніи, что ни A, ни E не равны нулю. Но если между коэффиціентами u и v существуетъ уравненіе

$$A^s E^q \, . \, \varphi(\alpha, \beta, \gamma, a, b, c, d) = P$$

при всѣхъ значеніяхъ этихъ коэффиціентовъ, не обращающихъ въ нуль ни A, ни E, то это уравненіе должно быть тождественнымъ. А въ такомъ случаѣ оно будетъ справедливо при *всѣхъ* величинахъ коэффиціентовъ безъ исключенія, и вмѣстѣ съ тѣмъ и ур. (10). Подобнымъ образомъ можно показать, что и ур. (11) остается вѣрнымъ при значеніяхъ коэффиціентовъ, обращающихъ въ нуль A и E, порознь или одновременно.

Если же $\varphi = \frac{P}{A^s E^q}$, гдѣ φ цѣлая функція коэффиціентовъ, то $\frac{P}{A^s E^q}$ должно привестись къ цѣлой функціи отъ A, B, C и E, потому-что всякое выраженіе, которое, будучи приведено къ простѣйшему виду, содержитъ еще въ знаменателѣ A или E, или произведеніе степеней A и E, при независимости между собою инваріантъ A, B, C и E, непремѣнно обратится въ безконечность при $A = 0$, или при $E = 0$, или въ обоихъ случаяхъ, и слѣдовательно не можетъ равняться инваріантѣ φ, остающейся конечною при всѣхъ возможныхъ конечныхъ величинахъ коэффиціентовъ u и v.

Подобнымъ образомъ и въ ур. (11) $\frac{Q}{A^t E^q}$ должно быть цѣлою функціею отъ A, B, C и E, потому-что иначе, такъ какъ $\sqrt{M}$ не обращается въ нуль ни при $A = 0$, ни при $E = 0$, выраженіе $\frac{Q}{A^t E^q}\sqrt{M}$ обращалось бы въ безконечность при $A = 0$, или при $E = 0$, или даже въ обоихъ случаяхъ, — что невозможно, если оно равняется цѣлой функціи φ отъ коэффиціентовъ u и v.

Замѣтивъ еще, что $l = -2\delta\sqrt{\varkappa}(X_1 + X_2)$, а слѣдовательно $K = F = -4\delta^3\varkappa^{\frac{3}{2}}(\lambda - \lambda') = \mp\sqrt{M}$, что согласно съ ур. (8), имѣемъ слѣдующую теорему:

Всякая прямая инваріанта формъ u и v есть цѣлая функція

отъ A, B, C и E, а всякая косая инваріанта равна нѣкоторой прямой инваріантѣ, помноженной на косую инваріанту K.

§ 14. *Типическія выраженія формъ u и v и ихъ коваріантъ.* Если мы имѣемъ коваріанту ψ степени n, то можемъ получить сколько угодно коваріантъ той же самой степени, составивъ сначала функціональные опредѣлители ψ съ каждою изъ квадратичныхъ формъ v, h и w, и поступая съ полученными коваріантами точно такъ, какъ съ ψ. Такимъ образомъ, имѣя одну линейную коваріанту $l = l_1x_1 + l_2x_2 = (a\alpha)^2 a_x$, мы можемъ получить сколько угодно линейныхъ коваріантъ. Напримѣръ функціональный опредѣлитель w и l будетъ $(wl)w_x$. Обозначивъ эту коваріанту чрезъ $2m$, имѣемъ двѣ перемѣнныя l и m, связанныя съ x_1 и x_2 линейнымъ образомъ, и слѣдовательно можемъ ввести ихъ на мѣсто x_1 и x_2 въ выраженія u и v и всѣхъ коваріантъ. Вообще, если нѣкоторая система формъ имѣетъ линейныя коваріанты, то по введеніи двухъ изъ нихъ, положимъ, l и m, на мѣсто перемѣнныхъ x_1 и x_2, всѣ коэффиціенты преобразованныхъ формъ будутъ инваріанты. Въ самомъ дѣлѣ, рѣшая ур.

$$l_1x_1 + l_2x_2 = l,\ \ m_1x_1 + m_2x_2 = m,$$

находимъ $r.x_1 = l_2m - m_2l$, $r.x_2 = -l_1m + m_1l$, гдѣ $r = m_1l_2 - m_2l_1$; и если $\varphi = p_0x_1^s + s.p_1x_1^{s-1}x_2 + \ldots = p_x^s$ коваріанта данной системы формъ, то подставивъ величины x_1 и x_2, получимъ:

$$r^s\varphi = P_0m^s - sP_1m^{s-1}l + \ldots,$$

гдѣ

$$P_0 = \varphi(l_2, -l_1) = (pl)^s,$$

$$P_1 = \frac{d\varphi(l_2, -l_1)}{dl_2}m_2 + \frac{d\varphi(l_2, -l_1)}{dl_1}m_1 = (pl)^{s-1}(pm)$$

. . . .

(§§ 1 и 5). Символическія выраженія $P_0, P_1, \ldots$ доказываютъ (§ 6), что эти коэффиціенты суть инваріанты данной системы формъ.

Въ случаѣ двухъ формъ $u = ax_1^3 + \ldots$ и $v = \alpha x_1^2 + \ldots$, опредѣлитель линейныхъ коваріантъ $m = \frac{1}{2}(wl)w_x$ и $l = (a\alpha)^2 a_x$,

$$m_1 l_2 - l_1 m_2 = (ml') = \tfrac{1}{2}(wl)(wl') = K,$$

и слѣдовательно будетъ

$$\left.\begin{aligned} K^2.v &= v_{ll}m^2 - 2v_{lm}lm + v_{mm}l^2 \\ K^2.h &= h_{ll}m^2 - 2h_{lm}lm + h_{mm}l^2 \\ K^2.w &= w_{ll}m^2 - 2w_{lm}lm + w_{mm}l^2 \end{aligned}\right\} \ldots \quad (12).$$

Выраженія коэффиціентовъ этихъ формулъ получаются весьма легко. Въ силу ур. (3), (4), (6) имѣемъ непосредственно

$$v_{ll} = 2E, \ h_{ll} = 2G, \ w_{ll} = 2K \ldots \quad (13).$$

Далѣе, такъ какъ вообще при $\varphi = \varphi_x^2$

$$\varphi_{lm} = (\varphi l)(\varphi m) = \tfrac{1}{2}(\varphi l)(\varphi w)(wl') = \tfrac{1}{2}(\varphi w)(\varphi l)(wl'),$$

а это равно половинѣ функціональнаго опредѣлителя $(\varphi w)\varphi_x w_x$, въ которомъ на мѣсто x_1 и x_2 написано l_2 и $-l_1$, то

$$\varphi_{lm} = \tfrac{1}{2}\begin{vmatrix} \varphi_{11}l_2 - \varphi_{12}l_1 & w_{11}l_2 - w_{12}l_1 \\ \varphi_{12}l_2 - \varphi_{22}l_1 & w_{12}l_2 - w_{22}l_1 \end{vmatrix} \ldots \quad (14).$$

Отсюда, при $\varphi = w$, находимъ $w_{lm} = 0$; а изъ ур. (4) § 9, написавъ v и h на мѣсто u и v, получимъ

$$\begin{aligned} (vw)v_x w_x &= v_1 w_2 - v_2 w_1 = -(Ah - Bv) \\ (hw)h_x w_x &= h_1 w_2 - h_2 w_1 = -(Bh - Cv). \end{aligned}$$

Чтобы получить v_{lm} и h_{lm}, нужно замѣнить въ этихъ ур. x_1 и x_2 постоянными l_2 и $-l_1$ (ур. 14); поэтому будетъ

$$v_{lm} = -(AG - BE); \ h_{lm} = -(BG - CE) \ldots \quad (15).$$

Остается опредѣлить коэффиціенты при l^2. Для этого замѣтимъ, что по самому опредѣленію

$$w = v_1 h_2 - v_2 h_1 = \begin{vmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{22} \\ h_{11} & h_{12} & h_{22} \\ x_2^2 & -x_1 x_2 & x_1^2 \end{vmatrix} = w_{11} x_1^2 + 2 w_{12} x_1 x_2 + w_{22} x_2^2,$$

$$w_{11} v_{22} - 2 w_{12} v_{12} + w_{22} v_{11} = 0, \quad w_{11} h_{22} - 2 w_{12} h_{12} + w_{22} h_{11} = 0,$$

а по ур. (6) § 9 $w_{11} w_{22} - w_{12}^2 = AC - B^2$. Поэтому, составивъ соотвѣтственныя выраженія изъ коэффиціентовъ преобразованныхъ формъ (12), получимъ:

$$w_{ll} w_{mm} - w_{lm}^2 = K^2 (AC - B^2) = K^2 G,$$
$$w_{ll} v_{mm} - 2 w_{lm} v_{lm} + w_{mm} v_{ll} = 0,$$
$$w_{ll} h_{mm} - 2 w_{lm} h_{lm} + w_{mm} h_{ll} = 0,$$

откуда, помощью ур. (13) и (15), выводимъ:

$$w_{mm} = \tfrac{1}{2} KG, \quad v_{mm} = -\tfrac{1}{2} GE, \quad h_{mm} = -\tfrac{1}{2} G^2 \ldots\ldots \quad (16).$$

И такъ, обозначивъ для сокращенія производныя K^2 по G и E, дѣленныя на 2

$$-(AG - BE) \text{ и } BG - CE$$

чрезъ S и T, имѣемъ: $v_{lm} = S$, $h_{lm} = -T$,

$$\left.\begin{aligned} \tfrac{1}{2} K^2 . v &= Em^2 - Sml - \tfrac{1}{4} EGl^2 = E(m^2 - \tfrac{1}{4} Gl^2) - Slm \\ \tfrac{1}{2} K^2 . h &= Gm^2 + Tml - \tfrac{1}{4} G^2 l^2 = G(m^2 - \tfrac{1}{4} Gl^2) + Tlm \end{aligned}\right\} \quad (17)$$

$$\tfrac{1}{2} K \,.\, w = m^2 + \tfrac{1}{4} Gl^2$$

И такъ

$$m^2 + \tfrac{1}{4} Gl^2 = \tfrac{1}{2} K . w \ldots\ldots \quad (18);$$

а рѣшая ур. (17) относительно $m^2 - \frac{1}{4} Gl^2$ и lm, и взявъ во вниманіе, что

$$ET + GS = K^2,$$

получимъ:

$$m^2 - \tfrac{1}{4}Gl^2 = \tfrac{1}{2}(Sh + Tv)\ldots \quad (19),$$

$$lm = \tfrac{1}{2}(Eh - Gv)\ldots \quad (20).$$

Отсюда видно, что *выраженіе* $Eh - Gv$ *всегда разлагается на раціональные множители.*

Изъ ур. (18), (19) и (20) можно еще вывести:

$$\left.\begin{aligned}\tfrac{1}{4}Gl^2 &= \tfrac{1}{4}(Kw - Sh - Tv)\\ m^2 &= \tfrac{1}{4}(Kw + Sh + Tv)\end{aligned}\right\}\ldots \quad (21).$$

Остается еще выразить u чрезъ l и m. Для этого вычислимъ сначала выраженія

$$u_{ll} = u_{11}l_2^2 - 2u_{12}l_1l_2 + u_{22}l_1^2,$$

$$u_{lm} = u_{11}l_2m_2 - 2u_{12}(l_1m_2 + l_2m_1) + u_{22}l_1m_1,$$

$$u_{mm} = u_{11}m_2^2 - 2u_{12}m_1m_2 + u_{22}m_1^2.$$

Величины этихъ линейныхъ функцій получатся изъ ур. (20) и (21), если напишемъ въ нихъ на мѣсто x_1^2, x_1x_2 и x_2^2 вторыя производныя отъ u: u_{22}, $-u_{12}$, u_{11}. Отъ этого h обратится въ $h_{11}u_{22} - 2h_{12}u_{12} + h_{22}u_{11} = (ba)^2a_x = 0$ (§ 6), v—въ $v_{11}u_{22} - 2v_{12}u_{12} + v_{22}u_{11} = (a\alpha)^2a_x = l$, а w—въ линейную коваріанту $w_{11}u_{22} - 2w_{12}u_{12} + w_{22}u_{11} = (wa)^2a_x$, которая во всякомъ случаѣ отъ введенія новыхъ перемѣнныхъ l и m на мѣсто x_1 и x_2 приметъ видъ $\frac{pl + qm}{K}$.

Поэтому будетъ:

$$\tfrac{1}{4}Gu_{ll} = \tfrac{1}{4}[(p - T)l + qm]$$

$$u_{lm} = -\tfrac{1}{2}Gl$$

$$u_{mm} = \tfrac{1}{4}[(p + T)l + qm].$$

Если вообще t какая ни есть линейная функція x_1 и x_2, то $K.t = t_lm - t_ml$, гдѣ $t_m = t_1m_2 - t_2m_1$, а $t_l = t_1l_2 - t_2l_1$. Взявъ на мѣсто t поочереди u_{ll}, u_{lm}, u_{mm}, и изобразивъ K^3u чрезъ

$u_{l^3}m^3 - 3u_{l^2m}lm^2 + 3u_{lm^2}l^2m - u_{m^3}l^3$, получимъ:

$$\tfrac{1}{4}GKu_{ll} = \tfrac{1}{4}G(u_{l^3}m - u_{l^2m}l) = \frac{K}{4}[(p-T)l + qm],$$

$$Ku_{lm} = u_{l^2m}m - u_{lm^2}l = -\frac{K}{2}Gl,$$

$$Ku_{mm} = u_{lm^2}m - u_{m^3}l = \frac{K}{4}[(p+T)l + qm].$$

Сравнивая коэффиціенты при l и m, находимъ:

$$Gu_{l^3} = qK, \quad Gu_{l^2m} = -(p-T)K,$$

$$u_{l^2m} = 0, \qquad u_{lm^2} = \tfrac{1}{2}GK,$$

$$u_{lm^2} = \tfrac{1}{4}qK, \quad u_{m^3} = -\tfrac{1}{4}K(p+T),$$

откуда:

$$p = T, \quad q = 2G,$$

$$u_{l^3} = 2K, \ u_{l^2m} = 0, \ u_{lm^2} = \tfrac{1}{2}GK, \ u_{m^3} = -\tfrac{1}{2}KT,$$

и наконецъ

$$2K^2 . u = 4m^3 + 3Gl^2m + Tl^3 \ldots \quad (22).$$

Выраженія u, v, h и w въ функціи линейныхъ коваріантъ называются *типическими* выраженіями этихъ формъ. Помощью ур. (17), (18) и (22) не трудно разобрать всѣ частные случаи, которые могутъ встрѣтиться при K, не равномъ нулю. Не останавливаясь на исчезаніи инваріантъ A, B, и C, я замѣчу только, что при $E = 0$ въ силу ур. (20) v разлагается на раціональные множители l и m, а въ случаѣ $G = 0$ h разлагается на тѣ же множители.

§ 15. Приведеніе u, v, h и w къ типическому виду по предъидущему способу невозможно, если $K = 0$. Можно однако замѣнить въ такомъ случаѣ одну изъ 2-хъ линейныхъ коваріантъ, напр. m, другою коваріантою, $n = n_1x_1 + n_2x_2$, если только $l_1n_2 - l_2n_1$ не $= 0$. Принявъ $n = \frac{1}{2}(al)a_x$, находимъ $(nl) = \frac{1}{2}(al)(al') = E$; поэтому, если только E не равно нулю, то можно выразить всѣ упомянутыя формы чрезъ l и n, какое бы ни было K. Начнемъ опять съ v, h и w. Въ выраженіяхъ

$$\left.\begin{aligned} E^2.v &= v_{ll}n^2 - 2v_{ln}ln + v_{nn}l^2 \\ E^2.h &= h_{ll}n^2 - 2h_{ln}ln + h_{nn}l^2 \\ E^2.w &= w_{ll}n^2 - 2w_{ln}ln + w_{nn}l^2 \end{aligned}\right\} \dots\dots\dots\dots \quad (23)$$

первые коэффиціенты уже извѣстны (13); а для опредѣленія среднихъ замѣтимъ, что вообще при $\varphi = \varphi_x^{\;2}$

$$\varphi_{ln} = (\varphi l)(\varphi n) = \tfrac{1}{2}(\varphi l)(\varphi a)(al'),$$

откуда заключаемъ, что φ_{ln} равно половинѣ функціональнаго опредѣлителя $(\varphi\alpha)\varphi_x\alpha_x$ при $x_1 = l_2$, $x_2 = -l_1$. Поэтому $v_{ln} = 0$; а такъ какъ $h_1v_2 - h_2v_1 = -w$, а $w_1v_2 - w_2v_1 = Ah - Bv$, то $h_{ln} = -K$, а $w_{ln} = -S$. Остается опредѣлить послѣдніе коэффиціенты. Для этого составимъ дискриминанты выраженій (23). Получимъ:

$$v_{nn}v_{ll} - v_{ln}^{\;2} = E^2(\alpha\gamma - \beta^2) = E^2A, \text{откуда } v_{nn} = \tfrac{1}{2}AE,$$
$$w_{nn}w_{ll} - w_{ln}^{\;2} = E^2(AC - B^2) = E^2G, \quad \text{»} \quad w_{nn} = -\tfrac{1}{2}AK,$$
$$h_{ll}h_{nn} - h_{ln}^{\;2} = E^2(h_{11}h_{22} - h_{12}^{\;2}) = E^2C, \quad \text{»} \quad h_{nn} = BE - \tfrac{1}{2}AG.$$

Поэтому будетъ:

$$\left.\begin{aligned} \tfrac{1}{2}E\ .v &= n^2 + \tfrac{1}{4}Al^2 \\ \tfrac{1}{2}E^2.h &= Gn^2 + Kln + \tfrac{1}{4}(2BE - AG)l^2 \\ \tfrac{1}{2}E^2.w &= Kn^2 + Sln - \tfrac{1}{4}AKl^2. \end{aligned}\right\} \dots \quad (24).$$

Опредѣлимъ теперь коэффиціенты формулы:

$$E^3.u = Ln^3 - 3Mn^2l + 3Nl^2n - Pl^3.$$

Изъ сказаннаго въ § 14 слѣдуетъ, что $L = (al)^3 = 2F = 2K$, а изъ ур. $u_{ll} = 2m$, выведеннаго въ предъидущемъ §, принявъ во вниманіе, что $u_{ll} = (al)^2a_x$, находимъ при $x_1 = n_2$, $x_2 = -n_1$:

$$M = (al)^2(an) = 2(mn) = (m\alpha)(\alpha l).$$

Но

$$lm = \frac{1}{2}(Eh - Gv), \ldots \quad (20),$$

слѣдовательно

$$(la)(ma) = EB - AG = S,$$

а поэтому

$$M = -S.$$

Чтобы получить N, положимъ въ первомъ изъ ур. (24) $x_1 = a_2$, $x_2 = -a_1$, и помножимъ его еще на (al). Получимъ:

$$\frac{1}{2}E(\alpha a)^2(al) = (na)^2(al) + \frac{1}{4}A(al)^3.$$

Но

$$(\alpha a)^2(al) = -(\alpha a)^2(a'\alpha')^2(a'a) = 0,$$

слѣдовательно

$$N + \frac{1}{4}AL = 0, \text{ или } N = -\frac{1}{2}AK.$$

Наконецъ изъ 1-го ур. (24), принявъ $x_1 = a_2$, $x_2 = -a_1$ и помноживъ его на (an), выводимъ:

$$\frac{1}{2}E(\alpha a)^2(an) = (an)^3 + \frac{1}{4}A(an)(al)^2,$$

или, такъ какъ $(\alpha a)^2(an) = \frac{1}{2}(\alpha a)^2(a\alpha')(\alpha' l) = -\frac{1}{2}(\alpha' l)(\alpha' l') = -E$,

$$P + \frac{1}{4}AM = -\frac{1}{2}E^2, \text{ или } P = \frac{1}{4}(AS - 2E^2).$$

И такъ новое типическое изображеніе u будетъ:

$$E^3 . u = 2Kn^3 + 3Sn^2l - \frac{3}{2}AKnl^2 + \frac{1}{4}(2E^2 - AS)l^3 \ldots \quad (25).$$

При $K = 0$, $E^2 . w = 2Sln$, а $E^3 . u = l[3Sn^2 + \frac{1}{4}(2E^2 - AS)l^2]$. Обѣ формы u и w содержатъ множитель l. Слѣдовательно *въ случаѣ $K = 0$ одна изъ двухъ точекъ $w = 0$, находящихся въ гармоническомъ соотношеніи съ каждою изъ двухъ паръ точекъ $v = 0$ и $h = 0$, совпадаетъ съ одною изъ точекъ $u = 0$.*

§ 16. Когда обѣ инваріанты K и E одновременно обращаются въ нуль, тогда ни одно изъ двухъ предъидущихъ преобразованій не возможно. Въ этомъ случаѣ, въ силу ур. (3) § 13, u и v имѣютъ общій множитель l. А такъ какъ при $E = 0$ K приводится къ $-AG^2$, то въ случаѣ $E=0$, $K=0$ еще должно быть либо $A=0$, либо $G=0$. Я разберу отдѣльно оба случая, допуская, что ни одна изъ коваріантъ не обращается тождественно въ нуль.

1. Въ случаѣ $A=0$, G не $=0$, такъ какъ v дѣлится на l, будетъ $v=\rho l^2$, гдѣ ρ постоянное. И такъ *при* $K=0$, $E=0$, $A=0$ *и* G *не* $=0$, *и дѣлится на* l, *а* v *на* l^2. Въ этомъ случаѣ можно ввести на мѣсто x_1 и x_2 линейныя коваріанты l и $p=\frac{1}{2}(lb)b_x$, опредѣлитель которыхъ равенъ G. Если притомъ еще $C=0$, то $h=\tau\lambda^2$, гдѣ τ постоянное, а λ линейный множитель, отличный отъ l. Принявъ $u=l(al^2+3bl\lambda+3c\lambda^2)$, находимъ $h=2(ac-b^2)l^2-2bc\lambda l-2c^2\lambda^2$, откуда $b=0$, $a=0$, $\tau=-2c^2$, т. е. $u=cl\lambda^2$.

2. Въ случаѣ $G=AC-B^2=0$, A не $=0$, u, h, w и v имѣютъ общій множитель l, а $w=\rho' l^2$; притомъ

a) если ни C, ни B не $=0$, то $A=\frac{B^2}{C}$, и ни h, ни v не полные квадраты. Пусть $h=2\varepsilon lq$, $v=\pi l^2+2\rho lq$; тогда $u=\mu l^3+\nu q^3$. Но вычисливъ l по этимъ формуламъ, находимъ $l=\pi\nu q$, что невозможно, такъ какъ q линейный множитель, отличный отъ l. И такъ, этотъ случай не можетъ представиться, пока l не обращается тождественно въ нуль.

b) если $C=0$, а слѣдовательно и $B=0$, то $h=\rho l^2$, $v=\sigma ls$, и слѣдовательно $u=l^2(\mu l+3\nu s)$.

Наконецъ, если въ одно время $A=0$ и $G=0$, то B также $=0$, и слѣдовательно $v=\rho l^2$, $h=\rho' ls$, $u=\mu l^3+\nu s^3$, откуда $l=\rho\nu s$, что невозможно. Слѣдовательно и этотъ случай не можетъ встрѣтиться, пока l не равно тождественно нулю.

Остается еще разобрать случай, когда l тождественно равно нулю, т. е. $l_1=0$ и $l_2=0$. Тогда E, G и K равны нулю.

1. Пусть v не квадратъ, а $=\rho xy$; тогда, такъ какъ $l=-\rho u_{12}$, u_{12} должно тождественно равняться нулю, и слѣд. $u=\mu x^3+\nu y^3$, $h=2\mu\nu xy$, т. е. *v пропорціонально Гессіану отъ u.*

2. Пусть $v=\rho x^2$, тогда $A=0$, и такъ какъ $G=AC-B^2$, то B также $=0$. Въ этомъ случаѣ $l=\rho u_{22}$, слѣдовательно u_{22}

тождественно равно нулю, т. е. $u = x^2(ax + by)$; другими словами: u дѣлится на v; а $h = -2b^2x^2$, слѣдовательно $C = 0$.

Въ обоихъ случаяхъ, по причинѣ пропорціональности v и h, функціональный опредѣлитель w этихъ формъ тождественно обращается въ нуль.

4. Система двухъ формъ 2-й и 4-й степеней.

§ 17. Пусть будетъ $u = ax_1^4 + 4bx_1^3x_2 + 6cx_1^2x_2^2 + 4dx_1x_2^3 + ex_2^4 = a_x^4 = a'^4_x = \ldots$, $v = \alpha_{11}x_1^2 + 2\alpha_{12}x_1x_2 + \alpha_{22}x_2^2 = \alpha_x^2 = \alpha'^2_x = \ldots$ Кромѣ инваріантъ и коваріантъ каждой отдѣльной формы, по способу § 6 получаемъ рядъ квадратическихъ коваріантъ, зависящихъ отъ коэффиціентовъ обѣихъ формъ:

$$\left.\begin{array}{l} \beta = \beta_{11}x_1^2 + \ldots = (a\alpha)^2a_x^2 = \beta_x^2 = \beta'^2_x = \ldots \\ \gamma = \gamma_{11}x_1^2 + \ldots = (a\beta)^2a_x^2 = \gamma_x^2 = \gamma'^2_x = \ldots \\ \delta = \delta_{11}x_1^2 + \ldots = (a\gamma)^2a_x^2 = \delta_x^2 = \delta'^2_x = \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \ldots \quad (1).$$

Можно доказать, что δ и всѣ дальнѣйшія коваріанты, получаемыя этимъ путемъ, выражаются линейно помощью предъидущихъ. Пусть будутъ l, m, n, p 4 послѣдовательныя коваріанты ряда (1), т. е. пусть $l = l_x^2$, $m = m_x^2 = (la)^2a_x^2$, $n = n_x^2 = (ma)^2a_x^2$, $p = p_x^2 = (na)^2a_x^2$, тогда

$$p = (na')^2a'^2_x = (ma)^2(aa')^2a'^2_x = (aa')^2(la'')^2(a''a)^2a'^2_x,$$

или, что одно и то же:

$$p = (aa')^2(la'')^2(a''a')^2a_x^2,$$

откуда

$$2p = (aa')^2(la'')^2\left\{(a''a)^2a'^2_x + (a''a')a_x^2\right\}.$$

Но изъ тождественнаго уравненія

$$a_x(a'a'') + a'_x(a''a) = -a''_x(aa')$$

находимъ:

$$a_x^2(a'a'')^2 + a'^2_x(a''a)^2 = 2a_x a'_x(a''a)(a''a') + a''^2_x(aa')^2.$$

Слѣдовательно

$$2p = (aa')^4.(la'')^2 a''^2_x + 2a_x a'_x(aa'')(a'a'')(aa')^2(la'')^2,$$

или

$$2p = (aa')^4.(la'')^2 a''^2_x + 2\tau, \ldots \quad (2),$$

гдѣ $\tau = a_x a'_x(aa'')(a'a'')(aa')^2(la'')^2$. Для опредѣленія этой квадратичной коваріанты, возьмемъ сумму 3-хъ выраженій τ, получаемыхъ посредствомъ круговаго перемѣщенія a, a', a''. Получимъ:
$3\tau = -(aa')(a'a'')(a''a)$

$$\times \{a_x a'_x(aa')(a''l)^2 + a'_x a''_x(a'a'')(al)^2 + a''_x a_x(a''a)(a'l)^2\},$$

или, взявъ во вниманіе ур. (6) § 6,

$$3\tau = +(aa')^2(a'a'')^2(a''a)^2.l_x^2.$$

Поэтому, если мы означимъ инваріанты формы u, символическія выраженія которыхъ суть $\frac{1}{2}(aa')^4$ и $\frac{1}{6}(aa')^2(a'a'')^2(a''a)^2$, чрезъ i и j, то будетъ

$$p = i\,m + 2j\,l \ldots \ldots \quad (3).$$

Это уравненіе показываетъ, что *каждая изъ коваріантъ (1) есть линейная функція двухъ предшествующихъ ей не непосредственно, а черезъ одну коваріанту*, т. е. δ выразится чрезъ v и β, ε чрезъ β и γ, и т. д.

Между инваріантами квадратичныхъ формъ l, m, n и p также существуютъ замѣчательныя соотношенія. Если вообще обозначимъ чрезъ A_{qr} или A_{rq} инваріанту двухъ квадратичныхъ формъ $q = q_x^2 = \ldots$ и $r = r_x^2 = \ldots$, символическое выраженіе которой есть $\frac{1}{2}(qr)^2$, и составимъ систему инваріантъ

$$\left.\begin{matrix} A_{ll} & A_{lm} & A_{ln} & A_{lp} \\ A_{ml} & A_{mm} & A_{mn} & A_{mp} \\ A_{nl} & A_{nm} & A_{nn} & A_{np} \\ A_{pl} & A_{pm} & A_{pn} & A_{pp}, \end{matrix}\right\} \ldots \quad (A),$$

то не только будетъ $A_{lm}=A_{ml}$, $A_{nl}=A_{ln}$, . . . , но также $A_{ln}=A_{mm}$, $A_{pl}=A_{nm}$, $A_{pm}=A_{nn}$. Въ самомъ дѣлѣ:

$$A_{ln}=\tfrac{1}{2}(nl)^2=\tfrac{1}{2}(ma)^2(al)^2=\tfrac{1}{2}(mm')^2=A_{mm}\ldots \quad (4).$$

Подобнымъ образомъ докажемъ, что $A_{pm}=A_{nn}$. Наконецъ

$$A_{pl}=\tfrac{1}{2}(pl)^2=\tfrac{1}{2}(na)^2(al)^2=\tfrac{1}{2}(mn)^2=A_{mn}\ldots\ldots \quad (5).$$

При $l=v$, инваріанты, соотвѣтствующія системѣ (A), будутъ:

$$A_{\alpha\alpha},\ A_{\alpha\beta},\ A_{\alpha\gamma}=A_{\beta\beta},\ A_{\alpha\delta}=A_{\beta\gamma},\ A_{\beta\delta}=A_{\gamma\gamma},\ A_{\gamma\delta},\ A_{\delta\delta}.$$

Помощью ур. (3) можно выразить $A_{\beta\gamma}$ и $A_{\gamma\gamma}$ чрезъ $A_{\alpha\alpha}$, $A_{\alpha\beta}$, $A_{\beta\beta}$, i и j. Принявъ въ ур. (3) $l=v$, $x_1=\alpha_2$, $x_2=-\alpha_1$, имѣемъ:

$$(\delta\alpha)^2=i(\beta\alpha)^2+2j(\alpha\alpha')^2,$$

откуда

$$A_{\alpha\delta}=A_{\beta\gamma}=i\,A_{\alpha\beta}+2j\,A_{\alpha\alpha}\ldots\ldots \quad (6).$$

Подобнымъ образомъ, принявъ въ ур. (3) $l=v$, $x_1=\beta_2$, $x_2=-\beta_1$, имѣемъ:

$$(\delta\beta)^2=i(\beta\beta')^2+2j(\alpha\beta)^2,$$

откуда

$$A_{\beta\delta}=A_{\gamma\gamma}=i\,A_{\beta\beta}+2j\,A_{\alpha\beta}\ldots\ldots \quad (7).$$

Кромѣ этихъ инваріантъ, квадратичныя формы v, β, γ имѣютъ *косую* инваріанту

$$K=\tfrac{1}{2}\begin{vmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{22}\\ \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{22}\\ \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{22}\end{vmatrix}$$

(§ 10), вѣсъ которой $=9$, такъ какъ она 3-й степени относительно коэффиціентовъ каждой изъ формъ u и v. Квадратъ этой инваріанты выражается слѣдующимъ образомъ:

$$K^2 = \begin{vmatrix} A_{\alpha\alpha} & A_{\alpha\beta} & A_{\alpha\gamma} \\ A_{\beta\alpha} & A_{\beta\beta} & A_{\beta\gamma} \\ A_{\gamma\alpha} & A_{\gamma\beta} & A_{\gamma\gamma} \end{vmatrix}.$$

Подставивъ сюда величины $A_{\beta\gamma}$ и $A_{\gamma\gamma}$ изъ ур. (6) и (7), имѣемъ:

$$K^2 = \begin{vmatrix} A_{\alpha\alpha} & A_{\alpha\beta} & A_{\beta\beta} \\ A_{\alpha\beta} & A_{\beta\beta} & 2jA_{\alpha\alpha} + iA_{\alpha\beta} \\ A_{\beta\beta} & 2jA_{\alpha\alpha} + iA_{\alpha\beta} & 2jA_{\alpha\beta} + iA_{\beta\beta} \end{vmatrix} \ldots \quad (8).$$

§ 18. На мѣсто u мы можемъ взять коваріанту $h = (aa')^2 a_x{}^2 a'_x{}^2 = b_x{}^4 = b'_x{}^4 = \ldots$, которая одинаковой степени съ u, и составить изъ h и v подобный же рядъ коваріантъ, какъ (1). Символическія выраженія этихъ коваріантъ будутъ:

$$(b\alpha)^2 b_x{}^2, \quad (b\beta)^2 b_x{}^2, \quad (b\gamma)^2 b_x{}^2, \ldots$$

Эти коваріанты не представляютъ однако ничего новаго, а выражаются линейно чрезъ v, β, γ, ...

Изъ уравненія

$$b_x{}^4 = (aa')^2 a_x{}^2 a'_x{}^2$$

выводимъ

$$2b_x{}^3 (b\alpha) = (aa')^2 \{a_x a'_x{}^2 (a\alpha) + a'_x a_x{}^2 (a'\alpha)\},$$

$$6b_x{}^2 (b\alpha)^2 = (aa')^2 \{4a_x a'_x (a\alpha)(a'\alpha) + a'_x{}^2 (a\alpha)^2 + a_x{}^2 (a'\alpha)^2\} \ldots \quad (9).$$

Но возведя въ квадратъ тождественное уравненіе

$$a_x (a'\alpha) + a'_x (\alpha a) = -\alpha_x (aa'),$$

находимъ:

$$a_x{}^2 (a'\alpha)^2 + a'_x{}^2 (a\alpha)^2 - 2a_x a'_x (a\alpha)(a'\alpha) = \alpha_x{}^2 (aa')^2.$$

Подставивъ отсюда величину удвоеннаго произведенія въ ур. (9), имѣемъ

$$6b_x{}^2 (b\alpha)^2 = \{3a'_x{}^2 (a\alpha)^2 + 3a_x{}^2 (a'\alpha)^2\}(aa')^2 - 2(aa')^4 \alpha_x{}^2 \ldots \quad (10).$$

Перейдя отъ символическихъ выраженій къ настоящимъ, имѣемъ, такъ какъ $\gamma = (a'\beta)^2 a'^2_x = a'^2_x (aa')^2 (a\alpha)^2$:

$$b_x^2 (b\alpha)^2 = \gamma - \tfrac{2}{3} i\, v \;\ldots\ldots\quad (11).$$

Написавъ въ ур. (10) β на мѣсто α, имѣемъ:

$$6 b_x^2 (b\beta)^2 = \{3 a'^2_x (a\beta)^2 + 3 a_x^2 (a'\beta)^2\} (aa')^2 - 2\beta_x^2 (aa')^4.$$

Но

$$(a\beta)^2 (aa')^2 a'^2_x = (\gamma a')^2 a'^2_x = \delta;$$

слѣдовательно будетъ

$$b_x^2 (b\beta)^2 = \delta - \tfrac{2}{3} i\, \beta \;\ldots\ldots\quad (12).$$

Ур. (11) и (12) приводятся Клебшемъ и Горданомъ безъ доказательства въ мемуарѣ «Sulla rappresentazione tipica delle forme binarie». Въ ур. (12) можно замѣнить коваріанту δ ея величиною, получаемою изъ ур. (3) при $l = v$:

$$\delta = i\beta + 2jv.$$

Тогда получимъ:

$$b_x^2 (b\beta)^2 = \tfrac{1}{3} i\, \beta + 2j\, v \;\ldots\ldots\quad (13).$$

Между коваріантами $\alpha = v$, β и γ существуетъ тождественное ур., которое по доказанному въ § 10 имѣетъ видъ:

$$\begin{vmatrix} A_{\alpha\alpha} & A_{\alpha\beta} & A_{\beta\beta} & \alpha \\ A_{\alpha\beta} & A_{\beta\beta} & A_{\beta\gamma} & \beta \\ A_{\beta\beta} & A_{\beta\gamma} & A_{\gamma\gamma} & \gamma \\ \alpha & \beta & \gamma & 0 \end{vmatrix} = 0 \;\ldots\quad (14).$$

или:

$$B_{\alpha\alpha}\alpha^2 + B_{\beta\beta}\beta^2 + B_{\gamma\gamma}\gamma^2 + 2B_{\alpha\beta}\alpha\beta + 2B_{\alpha\gamma}\alpha\gamma + 2B_{\beta\gamma}\beta\gamma = 0 \;\ldots\quad (15),$$

гдѣ $B_{\alpha\alpha}, \ldots$ частные опредѣлители 2-го порядка, составленные изъ элементовъ $A_{\alpha\alpha}, A_{\alpha\beta}, \ldots$.

Означивъ чрезъ $\Phi(\alpha, \beta, \gamma)$ первую часть ур. (15), въ силу ур. (8) § 10 имѣемъ еще слѣдующія формулы:

$$\left.\begin{aligned} K(\beta_1\gamma_2-\beta_2\gamma_1) &= \tfrac{1}{2}\Phi'(\alpha) = B_{\alpha\alpha}\alpha + B_{\alpha\beta}\beta + B_{\alpha\gamma}\gamma \\ K(\gamma_1\alpha_2-\gamma_2\alpha_1) &= \tfrac{1}{2}\Phi'(\beta) = B_{\beta\alpha}\alpha + B_{\beta\beta}\beta + B_{\beta\gamma}\gamma \\ K(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1) &= \tfrac{1}{2}\Phi'(\gamma) = B_{\gamma\alpha}\alpha + B_{\gamma\beta}\beta + B_{\gamma\gamma}\gamma \end{aligned}\right\} \ldots \quad (16),$$

гдѣ α_1 и α_2 означаютъ первыя производныя v, дѣленныя на 2,
β_1 » β_2 » » » β, » » »
γ_1 » γ_2 » » » γ, » » ».

Кромѣ того, помощью формулы (3) § 9 квадраты функціональныхъ опредѣлителей каждыхъ двухъ коваріантъ системы (1) выражаются въ видѣ раціональныхъ функцій этихъ коваріантъ безъ содѣйствія K. Наконецъ сама функція u можетъ быть представлена въ видѣ цѣлой функціи 2-й степени отъ v, β и γ. Для этого стоитъ только исключить u_{11}, u_{12}, u_{22} изъ ур.

$$\left.\begin{aligned} u_{11}\alpha_{22} - 2u_{12}\alpha_{12} + u_{22}\alpha_{11} &= \beta \\ u_{11}\beta_{22} - 2u_{12}\beta_{12} + u_{22}\beta_{11} &= \gamma \\ u_{11}\gamma_{22} - 2u_{12}\gamma_{12} + u_{22}\gamma_{11} &= \delta \\ u_{11}x_1^2 + 2u_{12}x_1x_2 + u_{22}x_2^2 &= u, \end{aligned}\right\} \ldots \quad (17),$$

что всегда возможно, если только K не $=0$. Результатъ исключенія будетъ:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{22} & -\alpha_{12} & \alpha_{11} & \beta \\ \beta_{22} & -\beta_{12} & \beta_{11} & \gamma \\ \gamma_{22} & -\gamma_{12} & \gamma_{11} & \delta \\ x_1^2 & x_1x_2 & x_2^2 & u \end{vmatrix} = 0,$$

откуда:

$$2Ku = -\begin{vmatrix} \alpha_{22} & \alpha_{12} & \alpha_{11} & \beta \\ \beta_{22} & \beta_{12} & \beta_{11} & \gamma \\ \gamma_{22} & \gamma_{12} & \gamma_{11} & \delta \\ x_1^2 & -x_1x_2 & x_2^2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Помноживъ это ур. на слѣдующее:

$$4K = \begin{vmatrix} \alpha_{22} & -2\alpha_{12} & \alpha_{11} & 0 \\ \beta_{22} & -2\beta_{12} & \beta_{11} & 0 \\ \gamma_{22} & -2\gamma_{12} & \gamma_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

получимъ:

$$2K^2.u = -\begin{vmatrix} A_{\alpha\alpha} & A_{\alpha\beta} & A_{\alpha\gamma} & \beta \\ A_{\alpha\beta} & A_{\beta\beta} & A_{\beta\gamma} & \gamma \\ A_{\gamma\alpha} & A_{\gamma\beta} & A_{\gamma\gamma} & \delta \\ \alpha & \beta & \gamma & 0 \end{vmatrix} \ldots\ldots\ldots (18).$$

Подставивъ сюда величины $A_{\beta\gamma}$, $A_{\gamma\gamma}$ и δ, получимъ K^2u въ функціи α, β, γ и пяти инваріантъ $A_{\alpha\alpha}$, $A_{\alpha\beta}$, $A_{\beta\beta}$, i и j. Для облегченія письма въ окончательныхъ формулахъ на мѣсто $A_{\alpha\alpha}$, $A_{\alpha\beta}$, $A_{\beta\beta}$ можно писать A, B, C. Тогда ур. (8) приметъ видъ

$$K^2 = \begin{vmatrix} A & B & C \\ B & C & 2jA + iB \\ C & 2jA + iB & 2jB + iC \end{vmatrix} \ldots\ldots\ldots (8),$$

или:

$$K = -A(2jA + iB)^2 + 2j(3ABC - B^3) + i(AC^2 + B^2C) - C^3,$$

а ур. (18) будетъ:

$$2K^2.u = -\begin{vmatrix} A & B & C & \beta \\ B & C & 2jA + iB & \gamma \\ C & 2jA + iB & 2jB + iC & 2j\alpha + i\beta \\ \alpha & \beta & \gamma & 0 \end{vmatrix} (18),$$

гдѣ α, β, γ суть 3 квадратичныя формы, связанныя ур. (15).

§ 19. Можно доказать, что система формъ $u = ax_1^4 + \ldots$ и $v = \alpha_{11}x_1^2 + \ldots$ не имѣетъ никакихъ инваріантъ, отличныхъ отъ

A, B, C, i, j и K, другими словами, что всякая инваріанта этой системы формъ можетъ быть представлена въ видѣ цѣлой раціональной функціи этихъ 6-ти инваріантъ. Для этого сдѣлаемъ такую подстановку модуля 1, чтобы v обратилось въ $2\mu XY$. Пусть u отъ этого обращается въ $a_0X^4+4a_1X^3Y+6a_2X^2Y^2+4a_3XY^3+a_4Y^4$. Тогда будетъ

$$\beta = \alpha_{11}u_{22}-2\alpha_{12}u_{12}+\alpha_{22}u_{11}=-2\mu(a_1X^2+2a_2XY+a_3Y^2),$$

а поэтому:

$$A=-\mu^2,$$
$$B=2a_2\mu^2,$$
$$C=4\mu^2(a_1a_3-a_2^2),$$
$$i=a_0a_4-4a_1a_3+3a_2^2,$$
$$j=a_0a_2a_4-a_1^2a_4-a_3^2a_0+2a_1a_2a_3-a_2^3.$$

Отсюда:

$$\mu=\sqrt{-A},\quad a_2=-\frac{B}{2A},$$

$$a_1a_3=\frac{B^2-AC}{4A^2},\quad a_0a_4=i+\frac{B^2-4AC}{4A^2}\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$-(a_0a_3^2+a_4a_1^2)=\frac{2jA+iB}{2A}+\frac{B^3-3ABC}{4A^3}\ldots\ldots \quad (\alpha)$$

$$a_0a_3^2\,.\,a_4a_1^2=a_0a_4\,.\,a_1^2a_3^2=\frac{(B^2-AC)^2(4A^2i+B^2-4AC)}{64A^6}$$

$$(a_0a_3^2-a_4a_1^2)^2=\left(\frac{2jA+iB}{2A}+\frac{B^3-3ABC}{4A^3}\right)^2-\frac{(B^2-AC)^2(4A^2i+B^2-4AC)}{16A^6}$$

$$=-\frac{1}{4A^3}\left\{-A(2jA+Bi)^2+2j(3ABC-B^3)+i(B^2C+AC^2)-C^3\right\}$$

$$=-\frac{M}{4A^3},$$

гдѣ M означаетъ полиномъ, заключающійся въ главныхъ скобкахъ; или:

$$a_0a_3^2-a_4a_1^2=\frac{\sqrt{M}}{2\sqrt{-A^3}}\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\beta).$$

Изъ уравненій (α) и (β) выводимъ, положивъ $A^2(2jA+iB)+\frac{1}{2}(B^3-3ABC)=L$:

$$a_0a_3^2=\frac{1}{4A^3}\{-L-\sqrt{-A^3M}\},\ a_4a_1^2=\frac{1}{4A^3}\{-L+\sqrt{-A^3M}\} \quad \ldots\ldots \quad (2).$$

Замѣтимъ теперь, что если $\varphi(\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{22}, a, b, c, d, e)$ есть инваріанта формъ u и v, и слѣдовательно равняется

$$\mu^n.\psi(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4), \ldots \quad (3),$$

гдѣ n степень φ относительно коэффиціентовъ v, а ψ цѣлая функція, то въ выраженіи $\psi(a_0, \ldots a_4)$ коэффиціенты a_0, a_1, a_3, a_4 не могутъ группироваться иначе, какъ они сгруппированы въ ур. (1) и (2). Въ этомъ можно убѣдиться, на основаніи теоремы, что сумма значковъ во всѣхъ членахъ инваріанты должна быть одна и та же, въ настоящемъ случаѣ $n+2m$ (§ 2), гдѣ m означаетъ степень φ относительно коэффиціентовъ u; а такъ какъ μ замѣняетъ коэффиціентъ со значкомъ 1, то сумма значковъ во всѣхъ членахъ ψ должна равняться $2m$, другими словами: среднее ариѳметическое изъ всѣхъ значковъ должно равняться 2. Отсюда заключаемъ, что если изобразимъ какой ни есть членъ ψ чрезъ

$$a_0^{\pi}a_1^{\rho}a_2^{\sigma}a_3^{\rho'}a_4^{\pi'}, \ldots\ldots\ldots \quad (\alpha),$$

то при $\pi' > \pi$ должно быть $\rho' < \rho$, и обратно, и притомъ разность между ρ' и ρ должна быть вдвое больше разности между π' и π. Допустимъ сперва, что $\pi' > \pi$ и означимъ $\pi'-\pi$ чрезъ δ, тогда будетъ $\rho-\rho'=2\delta$, и выраженіе (α) можетъ быть представлено въ слѣдующемъ видѣ:

$$(a_0a_4)^{\pi}(a_1a_3)^{\rho'}a_2^{\sigma}(a_4a_1^2)^{\delta} \ldots \quad (\beta).$$

Въ случаѣ же $\pi > \pi'$, означивъ $\pi-\pi'$ чрезъ δ, откуда $\rho'-\rho=2\delta$, приведемъ выраженіе (α) къ виду

$$(a_0a_4)^{\pi'}(a_1a_3)^{\rho}a_2^{\sigma}(a_0a_3^2)^{\delta} \ldots \quad (\gamma).$$

Оба выраженія (β) и (γ) составлены раціональнымъ образомъ изъ величинъ

$$a_2,\ a_0a_4,\ a_1a_3,\ a_0a_3^2 \text{ и } a_1^2a_4 \ldots\ldots\ldots \quad (\delta).$$

И такъ, какова бы ни была инваріанта φ, выраженіе ея въ коэффиціентахъ преобразованныхъ формъ не можетъ заключать въ себѣ коэффиціентовъ u иначе какъ въ сочетаніяхъ (δ), изъ которыхъ первыя три выражаются чрезъ A, B, C и i раціонально, а остальныя два чрезъ A, B, C, i и j помощью одного только радикала $\sqrt{-A^3M}$. Поэтому отъ подстановки величинъ произведеній (δ) выраженіе φ приметъ видъ

$$(-A)^{\frac{n}{2}-m}\{P+Q\sqrt{-A^3M}\}, \ldots \quad (4),$$

гдѣ P и Q цѣлыя функціи отъ A, B, C, i и j. Дальнѣйшія упрощенія этого выраженія зависятъ отъ четности или нечетности числа n.

1) Если n четное $=2p$, то вѣсъ инваріанты φ, $2m+n$, также будетъ число четное, и слѣдовательно эта инваріанта будетъ прямая. Въ такомъ случаѣ выраженіе (4) не должно измѣниться отъ перемѣщенія a_0 съ a_4, и a_1 съ a_3. Отъ этого не измѣняются произведенія a_0a_4 и a_1a_3, а произведенія $a_0a_3^2$ и $a_1^2a_4$ переходятъ одно въ другое; и такъ какъ величины (2) сихъ послѣднихъ отличаются только знакомъ при $\sqrt{-A^3M}$, то выраженіе (4) не должно измѣниться отъ перемѣны знака этого радикала, т. е. должно быть

$$P+Q\sqrt{-A^3M}=P-Q\sqrt{-A^3M},$$

откуда $Q=0$. Слѣдовательно общій видъ *прямой* инваріанты будетъ

$$A^{p-m}P,$$

гдѣ P цѣлая функція отъ A, B, C, i и j, которая (въ чемъ не трудно убѣдиться) въ случаѣ $m>p$ должна раздѣлиться на A^{m-p}.

2) Если n нечетное $=2p+1$, то число $2m+n$, выражающее вѣсъ инваріанты, также нечетное, и слѣдовательно инваріанта φ

косая. Въ этомъ случаѣ выраженіе (4) должно перемѣнить свой знакъ съ перемѣною знака $\sqrt{-A^3M}$, и слѣдоват. должно быть

$$P+Q\sqrt{-A^3M}=-(P-Q\sqrt{-A^3M}),$$

откуда $P=0$. И такъ общій видъ *косой* инваріанты будетъ

$$A^{p-m+2}Q\sqrt{M},$$

гдѣ Q цѣлая функція отъ A, B, C, i и j. Такъ какъ при $A=0$ M не обращается въ нуль, то не трудно убѣдиться, что въ случаѣ $m>p+2$ Q должно раздѣлиться на A^{m-p-2}.

Радикалъ $\sqrt{M}$ самъ по себѣ есть инваріанта. Въ самомъ дѣлѣ, составивъ опредѣлитель изъ коэффиціентовъ 3-хъ квадратичныхъ коваріантъ

$$\begin{aligned}
v &= \quad 2\mu XY,\\
\beta &= -2\mu(a_1X^2+2a_2XY+a_3Y^2),\\
\gamma &= -2\mu[(a_0a_3-a_1a_2)X^2+4(a_1a_3-a_2^2)XY+(a_1a_4-a_2a_3)Y^2]
\end{aligned}$$

(§ 10) находимъ:

$$K=2\mu^2\begin{vmatrix} 0 & \mu & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_0a_3-a_1a_2 & 2(a_1a_3-a_2a_3) & a_1a_4-a_2a_3 \end{vmatrix}$$

$$=2\mu^3(a_0a_3^2-a_1^2a_4)=\sqrt{M},$$

что согласно съ ур. (8) предъидущаго §.

И такъ, имѣемъ слѣдующую теорему:

Всякая прямая инваріанта формъ u и v есть цѣлая функція отъ A, B, C, i и j, а всякая косая инваріанта этихъ формъ равна подобной же функціи, помноженной на косую инваріанту K, § 17.

§ 20. Если $K=0$, то между v, β и γ существуетъ линейное соотношеніе (§ 18, ур. 16), и слѣдовательно изъ 4 ур. (17) § 18 нельзя исключить u_{11}, u_{12}, u_{22}, а поэтому нельзя получить ур. (18).

Если v и β не пропорціональны другъ другу, и β не обращается тождественно въ нуль, то на мѣсто γ можно взять функціональный опредѣлитель

$$\vartheta = v_1\beta_2 - v_2\beta_1,$$

который связанъ съ v и β уравненіемъ

$$\vartheta^2 = -\{A_{\alpha\alpha}\beta^2 - 2A_{\alpha\beta}v\beta + A_{\beta\beta}v^2\},$$

Выразимъ u чрезъ v, β и ϑ, не предполагая, что $K=0$. На мѣсто K^2 войдетъ опредѣлитель

$$\begin{vmatrix} A_{\alpha\alpha} & A_{\alpha\beta} & A_{\alpha\vartheta} \\ A_{\beta\alpha} & A_{\beta\beta} & A_{\beta\vartheta} \\ A_{\vartheta\alpha} & A_{\vartheta\beta} & A_{\vartheta\vartheta} \end{vmatrix}, \ldots \quad (1),$$

гдѣ $A_{\alpha\vartheta}, \ldots$ суть выраженія, составленныя подобнымъ образомъ, какъ $A_{\alpha\beta}, \ldots$ Но изъ теоріи двухъ квадратичныхъ формъ, въ приложеніи къ v и β, слѣдуетъ, что

$$A_{\alpha\vartheta} = 0,\ A_{\beta\vartheta} = 0,\ A_{\vartheta\vartheta} = A_{\alpha\alpha}A_{\beta\beta} - A_{\alpha\beta}^2 = B_{\gamma\gamma};$$

поэтому величина опредѣлителя (1) будетъ $A_{\vartheta\vartheta}^2 = B_{\gamma\gamma}^2$.

И такъ, u выражается чрезъ v, β и ϑ, если только $A_{\vartheta\vartheta}$ не $=0$. На мѣсто ур. (18) § 18 получимъ, если возьмемъ ϑ на мѣсто γ, и какую ни есть форму φ на мѣсто u:

$$2A_{\vartheta\vartheta}^2 . \varphi = -\begin{vmatrix} A_{\alpha\alpha} & A_{\alpha\beta} & 0 & \varphi_\alpha \\ A_{\alpha\beta} & A_{\beta\beta} & 0 & \varphi_\beta \\ 0 & 0 & A_{\vartheta\vartheta} & \varphi_\vartheta \\ \alpha & \beta & \vartheta & 0 \end{vmatrix}.$$

или:

$$2A_{\vartheta\vartheta}\varphi = \vartheta . \varphi_\vartheta - \alpha(B\varphi_\beta - C\varphi_\alpha) + \beta(A\varphi_\beta - B\varphi_\alpha), \ldots \quad (2),$$

гдѣ вообще φ_ε означаетъ выраженіе $\varphi_{11}\varepsilon_{22} - 2\varphi_{12}\varepsilon_{12} + \varphi_{22}\varepsilon_{11}$. Ур. (2) даетъ при $\varphi = u$:

$$2A_{\vartheta\vartheta} . u = \vartheta u_\vartheta - \alpha(B\gamma - C\beta) + \beta(A\gamma - B\beta),$$

а при $\varphi = u_\vartheta$:

$$2A_{\vartheta\vartheta}\,.\,u_\vartheta = \vartheta u_{\vartheta\vartheta} - \alpha\,(Bu_{\vartheta\beta} - Cu_{\vartheta\alpha}) + \beta\,(Au_{\vartheta\beta} - Bu_{\vartheta\alpha}).$$

Изъ уравненія

$$\vartheta^2 = -\{A\beta^2 - 2B\beta v + Cv^2\},$$

написавъ на мѣсто

$$x_1^4, \qquad x_1^3x_2, \qquad x_1^2x_2^2, \qquad x_1x_2^3, \qquad x_2^4$$

коэффиціенты формы u:

$$e, \qquad -d, \qquad c, \qquad -b, \qquad a$$

(или, что одно и то же: принявъ $x_1 = a_2$, $x_2 = -a_1$, и сдѣлавъ символическую подстановку $a_1^4 = a$, $a_1^3a_2 = b, \ldots$), находимъ:

$$u_{\vartheta\vartheta} = -(Au_{\beta\beta} - 2Bu_{\alpha\beta} + Cu_{\alpha\alpha});$$

а такъ какъ

$$u_{\alpha\alpha} = (a\alpha)^2(a\alpha')^2 = (\beta\alpha')^2 = 2B$$
$$u_{\alpha\beta} = (a\alpha)^2\,(a\beta)^2 = (\beta\beta')^2 = 2C$$
$$u_{\beta\beta} = (a\beta)^2\,(a\beta')^2 = (\gamma\beta)^2 = 2\,(2jA + iB) = 2D,$$

то

$$u_{\vartheta\vartheta} = -2\,(AD - BC) = 2\,(BC - 2A^2j - ABi) = 2E.$$

Инваріанта $u_{\vartheta\alpha}$ равна нулю, потому-что

$$u_{\vartheta\alpha} = (a\alpha)^2(a\vartheta)^2 = (a\alpha)^2(\alpha''\beta)(\alpha''a)\,(\beta a) = (\alpha a)^2(a'\alpha')^2(a'a)\,(\alpha''a')\,(\alpha''a),$$

а это выраженіе мѣняетъ знакъ отъ перестановки a съ a', α съ α'. Наконецъ

$$u_{\vartheta\beta} = (\vartheta a)^2\,(\beta a)^2 = (\vartheta\gamma)^2 = 2K \quad (\S\ 10).$$

Поэтому

$$A_{\vartheta\vartheta}u_\vartheta = E\,.\,\vartheta - K(B\alpha - A\beta),$$

и слѣдовательно

$$2A_{\vartheta\vartheta}^2\,.\,u = \vartheta\,[E\,.\,\vartheta - K(B\alpha - A\beta)] - A_{\vartheta\vartheta}\alpha\,(B\gamma - C\beta)$$
$$+ A_{\vartheta\vartheta}\beta\,(A\gamma - B\beta).$$

Подставивъ сюда величину γ изъ ур. (16) § 18, которое можетъ быть написано въ слѣдующемъ видѣ:

$$K\vartheta = F\alpha + E\beta + A_{33}\gamma,$$

если для сокращенія положимъ $BD - C^2 = F$, имѣемъ:

$$2A_{33}^2 . u = E\vartheta^2 - 2K\vartheta(B\alpha - A\beta) + (B\alpha - A\beta)(F\alpha + E\beta)$$
$$+ A_{33}(C\alpha\beta - B\beta^2) \ldots\ldots\ldots \quad (3).$$

Вотъ выраженіе u въ функціи 3-хъ перемѣнныхъ α, β и ϑ, связанныхъ уравненіемъ

$$\vartheta^2 = -(A\beta^2 - 2B\alpha\beta + C\alpha^2).$$

При $K = 0$ первая степень ϑ исчезаетъ изъ выраженія u, и слѣдовательно u выразится *раціонально* чрезъ α и β, а именно будетъ:

$$2A_{33}^2 . u = P\,\alpha^2 + 2Q\,\alpha\beta + R\,\beta^2,$$

гдѣ

$$P = BF - CE = B^2D + ACD - 2BC^2,$$
$$2Q = 3BE - AF + A_{33}C = 2(AC^2 - 2ABD + B^2C),$$
$$R = -2AE - A_{33}B = B^3 + 2A^2D - 3ABC.$$

Въ этомъ случаѣ ур. $u = 0$ рѣшается помощью однихъ квадратныхъ корней. Если положить $\frac{\beta}{\alpha} = y$, то оно приметъ видъ

$$P + 2Qy + Ry^2 = 0,$$

а опредѣливъ отсюда y, найдемъ $\frac{x_1}{x_2}$ изъ ур. $\beta - \alpha y = 0$. Подставивъ въ выраженіе ϑ^2 αy на мѣсто β, находимъ:

$$\vartheta = \alpha\sqrt{-(Ay^2 - 2By + C)} = \alpha z.$$

Обозначивъ чрезъ μ значеніе α при x_1 и x_2, обращающихъ въ нуль функцію u, и рѣшивъ линейно уравненія

$$\alpha = \mu, \quad \beta = \mu y, \quad \gamma = \mu z$$

относительно x_1^2, x_1x_2 и x_2^2, мы найдемъ для отношеній этихъ произведеній $\frac{x_1^2}{x_1x_2} = \frac{x_1x_2}{x_2^2} = \frac{x_1}{x_2}$ величину независимую отъ μ.

Если A_{33} не равно нулю, то можно преобразовать одновременно α и β въ двѣ различныя между собою суммы двухъ квадратовъ. Тогда выраженіе $P\alpha^2 + 2Q\alpha\beta + R\beta^2$, равное $2A_{33}^2u$ при $K = 0$, будетъ заключать только четныя степени перемѣнныхъ. И такъ, въ случаѣ $K=0$, A_{33} не$=0$, данныя формы u и v помощью линейнаго преобразованія могутъ быть приведены къ такому виду, что онѣ не будутъ заключать вовсе нечетныхъ степеней перемѣнныхъ. Обратно, если u и v выражаются раціонально чрезъ x^2 и y^2, гдѣ x и y линейныя функціи x_1 и x_2, то $K = 0$. Въ самомъ дѣлѣ, инваріанта K косая, т. е. сумма значковъ во всѣхъ членахъ K нечетная (если значки коэффиціентовъ u и v соотвѣтствуютъ степенямъ y, на которыя они помножаются); а для этого каждый членъ долженъ заключать въ себѣ по крайней мѣрѣ одинъ коэффиціентъ съ нечетнымъ значкомъ. А такъ какъ всѣ эти коэффиціенты равны нулю, то и $K = 0$. Поэтому $K = 0$ есть условіе, необходимое и достаточное для того, чтобы u и v выражались помощью однѣхъ четныхъ степеней нѣкоторыхъ линейныхъ функцій x_1 и x_2. Въ геометрическомъ смыслѣ ур. $K = 0$ будетъ условіе *инволюціи* 6-ти точекъ, выражаемыхъ уравненіемъ $uv = 0$ (§ 12). Въ самомъ дѣлѣ, при $K = 0$, $u = P(\alpha + \varkappa\beta)(\alpha + \varkappa'\beta)$, а если α и β суть суммы двухъ квадратовъ, то и $\alpha + \varkappa\beta$ и $\alpha + \varkappa'\beta$ будутъ суммы 2-хъ квадратовъ, и слѣдовательно 3 пары точекъ $\alpha = 0$, $\alpha + \varkappa\beta = 0$, $\alpha + \varkappa'\beta = 0$ составятъ инволюцію. Обратно, если 6 точекъ, выражаемыхъ уравненіями $u = 0$ и $v = 0$, находятся въ инволюціи, то v и два квадратныхъ множителя u, а слѣдовательно и u, выражаются помощью однѣхъ только четныхъ степеней перемѣнныхъ, и слѣдовательно будетъ $K = 0$.

§ 21. Ни одна изъ двухъ формулъ (18) § 18 и (3) § 20 не имѣетъ мѣста при $K = 0$ и $A_{33} = 0$. Помощью ур.

$$A_{33} = AC - B^2 = 0$$

ур. $K^2=0$ приводится къ виду:

$$C(BD-C^2)+D(CB-AD)=0,\ldots\quad(1),$$

гдѣ написано D на мѣсто $A_{\beta\gamma}=2jA+iB$. Помноживъ это ур. на A и написавъ B^2C^2 на мѣсто AC^3, получимъ

$$-(AD-BC)^2=0,$$

откуда

$$AD-BC=0,$$

а слѣдовательно въ силу ур. (1) и

$$BD-C^2=0.$$

Поэтому будетъ:

$$\frac{A}{B}=\frac{B}{C}=\frac{C}{2jA+iB}=\frac{2jA+iB}{2jB+iC},$$

гдѣ $2jB+iC$ есть величина инваріанты $A_{\gamma\gamma}$. Другими словами, инваріанты $A_{\alpha\alpha}=A$, $A_{\alpha\beta}=B$, $A_{\beta\beta}=C$, $A_{\beta\gamma}=D$, $A_{\gamma\gamma},\ldots$ составляютъ геометрическую прогрессію. Обозначивъ знаменатель этой прогрессіи чрезъ λ, имѣемъ $B=\lambda A$, $D=\lambda^3 A$, и слѣдовательно, такъ какъ $D=2jA+iB$,

$$\lambda^3-i\lambda-2j=0\ldots\ldots\quad(2).$$

Поэтому знаменатель прогрессіи удовлетворяетъ кубическому ур. (2), и слѣдовательно обращаетъ выраженіе $h+\lambda u$ въ полный квадратъ. И такъ имѣемъ теорему:

«Если $K=0$ и $A_{\vartheta\vartheta}=0$, то инваріанты $A_{\alpha\alpha}, A_{\alpha\beta}, A_{\beta\beta}, A_{\beta\gamma}, A_{\gamma\gamma}$ составляютъ геометрическую прогрессію, знаменатель которой, будучи подставленъ на мѣсто λ въ выраженіе $h+\lambda u$, обращаетъ его въ полный квадратъ».

Нужно теперь различить два случая. Изъ ур. $AC-B^2=0$ слѣдуетъ, что $v=\alpha$ и β имѣютъ общій множитель.

1. Если ϑ не обращается тождественно въ нуль, то этотъ множитель можетъ быть только первой степени. Пусть $v=\xi a$ $\beta=\xi b$, гдѣ ξ, a и b три различныя между собою линейныя вы-

раженія. Вслѣдствіе ур. $K=0$ между v, β и γ существуетъ линейное соотношеніе, а слѣдовательно и γ содержитъ множитель ξ: пусть $\gamma=\xi c$. Дифференцируя ур. $v=\xi a$, находимъ:

$$v_{11}=\xi_1 a_1,\ v_{12}=\tfrac{1}{2}(\xi_1 a_2+\xi_2 a_1),\ v_{22}=\xi_2 a_2;$$

поэтому

$$\beta=(a\alpha)^2 a_x^{\,2}=u_{11}v_{22}-2u_{12}v_{12}+u_{22}v_{11}=a_2(u_{11}\xi_2-u_{12}\xi_1)$$
$$-a_1(u_{12}\xi_2-u_{22}\xi_1),$$

или, означивъ $u_1\xi_2-u_2\xi_1$, чрезъ η имѣемъ

Подобнымъ образомъ

$$\left.\begin{aligned}\beta&=\xi b=a_2\eta_1-a_1\eta_2.\\ \gamma&=\xi c=b_2\eta_1-b_1\eta_2,\end{aligned}\right\}\ldots\quad(3),$$

и слѣдовательно изъ тождественнаго уравненія

$$\begin{vmatrix}\eta & a & b\\ \eta_1 & a_1 & b_1\\ \eta_2 & a_2 & b_2\end{vmatrix}=0,$$

или

$$\eta(a_1b_2-a_2b_1)+a(b_1\eta_2-b_2\eta_1)+b(\eta_1a_2-\eta_2a_1)=0$$

выведемъ слѣдующее уравненіе:

$$\eta(a_1b_2-a_2b_1)+\xi(b^2-ac),$$

которое показываетъ, что η дѣлится на ξ. Пусть $\eta=\xi\eta'$. Подставивъ эту величину въ ур. (3), находимъ:

$$3\xi b=\eta'(\xi_1a_2-\xi_2a_1)+2\xi(\eta'_1a_2-\eta'_2a_1)$$
$$3\xi c=\eta'(\xi_1b_2-\xi_2b_1)+2\xi(\eta'_1b_2-\eta'_2b_1);$$

а такъ какъ a и b линейныя выраженія, отличныя отъ ξ, то η' еще разъ должно раздѣлиться на ξ. Пусть $\eta'=\xi\zeta$, слѣдовательно $\eta=\xi^2\zeta$, гдѣ ζ линейная функція. Подставивъ эту величину η въ ур. (3), и раздѣливъ каждое изъ нихъ на ξ, найдемъ b и c въ зависимости отъ ξ, a и ζ.

Изъ ур.

$$u_1\xi_2 - u_2\xi_1 = \eta = \xi^2\zeta,$$
$$x_2\xi_2 + x_1\xi_1 = \xi,$$

находимъ:

$$\left.\begin{aligned}(u_1x_1 + u_2x_2)\,\xi_2 &= \xi^2\zeta x_1 + u_2\xi\\ (u_1x_1 + u_2x_2)\,\xi_1 &= \xi u_1 - \xi^2\zeta x_2\end{aligned}\right\}, \ldots \quad (4),$$

откуда видно, что $u = u_1x_1 + u_2x_2$ дѣлится на ξ. Пусть $u = \xi u'$; тогда $4u_i = \xi_i u' + 3\xi u_i'$, и слѣдовательно изъ ур. (4) получимъ:

$$3u'\xi_2 = \xi\,(3u'_2 + 4\zeta x_1)$$
$$3u'\xi_1 = \xi\,(3u'_1 - 4\zeta x_2),$$

откуда заключаемъ, что u' дѣлится на ξ. Пусть $u' = \xi w$, тогда $u = \xi^2 w$. И такъ, *въ случаѣ $K = 0$, $A_{\vartheta\vartheta} = 0$, и содержитъ квадратъ общаго множителя v и β.*

Обратно, если $v = \xi a$, $u = \xi^2 w$, гдѣ ξ и a какіе угодно различные между собою линейные множители, а w какая угодно квадратичная форма, то β также дѣлится на ξ, а $A_{\vartheta\vartheta}$ и K обращаются въ нуль. Въ самомъ дѣлѣ, принявъ ξ и a за перемѣнныя, находимъ, что β пропорціонально

$$-2\,\frac{d^2(\xi^2 w)}{d\xi da}\,\frac{d^2(\xi a)}{d\xi da} = -4\xi\,\frac{dw}{da},$$

и слѣдовательно дѣлится на ξ. Подобнымъ образомъ, положивъ $\beta = \xi b$ и принявъ ξ и b за перемѣнныя, докажемъ, что γ также дѣлится та ξ. Если же v, β и γ имѣютъ общій множитель ξ, то $A_{\vartheta\vartheta} = 0$ и между этими тремя квадратичными формами существуетъ линейное соотношеніе, и слѣдовательно ихъ опредѣлитель $K = 0$.

2. Если ϑ тождественно обращается въ нуль, то v и β могутъ различаться только постояннымъ множителемъ (§ 9). Положивъ $\beta = \varepsilon . v$, находимъ

$$\gamma = u_{11}\beta_{22} - 2u_{12}\beta_{12} + u_{22}\beta_{11} = \varepsilon\beta = \varepsilon^2 v.$$

Слѣд. $A_{\vartheta\vartheta} = 0$, и $K = 0$. Составивъ инваріанты A, B, C, D, находимъ, что $B = \varepsilon A$, $C = \varepsilon B = \varepsilon^2 A$, $D = \varepsilon C = \varepsilon^3 A = 2jA + iB$, откуда

$$\varepsilon^3 - i\varepsilon - 2j = 0.$$

a) Пусть v не квадратъ, а $= 2\delta XY$. Тогда получимъ

$$\beta = u_{11}\alpha_{22} - 2u_{12}\alpha_{12} + u_{22}\alpha_{11} = -2\delta(a_1X^2 + 2a_2XY + a_3Y^2)$$
$$= 2\varepsilon\delta XY,$$

откуда $a_1 = 0$, $a_3 = 0$, $a_2 = -\frac{1}{2}\varepsilon$.

Поэтому будетъ

$$u = a_0X^4 - 3\varepsilon X^2Y^2 + a_4Y^4 \ldots \quad (5),$$

т. е. *u выражается помощью однѣхъ четныхъ степеней линейныхъ множителей v.*

b) Пусть $v = X^2$, и слѣдовательно $\beta = \varepsilon X^2$. Тогда A и всѣ инваріанты $B, C, D, \ldots$ квадратичныхъ формъ (1) § 17 равны нулю. Такъ какъ, при $v = X^2$, $\beta = a_2X^2 + 2a_3XY + a_4Y^2 = \varepsilon X^2$, то $\varepsilon = a_2$, а $a_3 = a_4 = 0$, и слѣдовательно

$$u = X^2Z,$$

гдѣ Z нѣкоторая квадратичная форма.

И такъ, если $\mathfrak{J}$ тождественно равно нулю, а v полный квадратъ, то u дѣлится на v.

Въ заключеніе разсмотримъ случай, когда β, а слѣдовательно и $\gamma, \delta, \ldots$ тождественно обращаются въ нуль. Тогда очевидно $B = C = \ldots = 0$, а слѣдовательно и $A_{\mathfrak{s}\mathfrak{s}} = 0$. Кромѣ того $K = 0$, и при $v = 2\delta XY$ изъ ур.

$$\beta = -2\delta(a_1X^2 + 2a_2XY + a_3Y^2) = 0$$

заключаемъ, что $a_1 = a_2 = a_3 = 0$, т. е. что u приводится къ виду

$$u = a_0X^4 + a_4Y^4.$$

Слѣдовательно $i = a_0a_4$, а $j = 0$; а при $v = X^2$ изъ ур.

$$\beta = a_2X^2 + 2a_3XY + a_4Y^2 = 0$$

выводимъ, что $a_2 = a_3 = a_4 = 0$, т. е. $u = X^3(a_0X + 4a_1Y)$.

ОПЕЧАТКИ.

На стран. 13, въ 8 и 9 стр. напечатано Π на мѣсто π.
» » 24, » 14 » » $a_0x =$ » » $a_0x +$.